MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

Une approche duale d'un problème à plusieurs niveaux en optimisation de structure

Fontaine, Frédéric; Poisseroux, Jacqueline

Award date:
1987

Awarding institution:
Universite de Namur

Une approche duale d'un problème à plusieurs niveaux en optimisation de structure

Promoteurs :
Professeur NGUYEN VAN HIEN
Docteur JEAN-JACQUES STRODIOT

FONTAINE FREDERIC
POISSEROUX JACQUELINE

Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix
Faculté des Sciences
rue de Bruxelles 61,B-5000 **NAMUR**
Tel. 081-22.90.61 Telex 59222 facnam-b Telefax 081-23.03.91

Une approche duale d'un problème à deux niveaux en optimisation de structures.

FONTAINE FREDERIC

POISSEROUX JACQUELINE

Résumé

Dans ce mémoire, nous développons deux méthodes de linéarisation convexe pour résoudre un problème d'optimisation de structures . Elles consistent à remplacer le problème originel par une suite de sous-problèmes approximants . Dans la première méthode la solution de chaque sous-problème est obtenue par décomposition tandis que dans la seconde elle est recherchée par dualité . La seconde méthode à été implémentée et testée sur un certain nombre d'exemples .

Abstract

In this work two convex linearization methods have been developed for solving a problem of structural optimization . They consist in replacing the main problem by a sequence of approximating subproblems . The solution of each subproblem is obtained by decomposition in the former and by using duality in the latter . The second method has been implemented and tested on several test-problems .

Mémoire de licence en Sciences Mathématiques

Juin 1987

Unité d'Optimisation

Promoteurs: Prof. NGUYEN V.H.
Dr . J . J . STRODIOT

Je dédie ce mémoire à ma maman

J. Poisseroux

Nous remercions nos parents de nous avoir permis de mener à bien nos études .

Nous tenons également à remercier nos promoteurs messieurs Nguyen Van Hien et Jean-Jacques Strodiot pour leur disponibilité et leurs conseils .

Ce mémoire fut élaboré grâce aux articles et travaux du docteur J.F.M.Barthelemy du Langley Research Center (NASA) qu'il a eu la gentillesse de nous envoyer .

Merci à E. Hallet et J. Engels pour leurs encouragements et leur aide dans la parite informatique .

PLAN

CHAPITRE 1 :

INTRODUCTION

Le problème traité dans ce mémoire **[Ref.6]** consiste à minimiser une fonction sous contraintes d'inégalité et contraintes de bornes sur les variables, toutes les fonctions étant une fois continûment différentiables . La caractéristique de ce problème réside dans le fait que la fonction objectif ne dépend pas d'un sous-ensemble des variables du problème, ce qui confère aux contraintes des statuts différents à savoir *local* si elles dépendent de ce sous-ensemble de variables et *global* si elles n'en dépendent pas . Cette forme particulière découle de la modélisation de problèmes d'ingénieurs comme le " 3-bar truss " .

Nous avons étudié l'article "*An improved multilevel optimisation approach for the design of complex engineering systems* " de J.F. Barthelemy dans lequel le problème originel est remplacé par une suite de sous-problèmes approximants, créés par la linéarisation convexe de la fonction objectif et des contraintes . Chaque sous-problème y est alors résolu par décomposition en sous-sous-problèmes .

Sur base de cet article, nous avons tenté une nouvelle approche . Nous avons conservé le principe des approximations successives mais avons résolu chaque sous-problème par méthode duale . Ce type de résolution s'est avéré aisé grâce à la propriété de séparabilité dont chaque sous-problème bénéficie . Nous avons implémenté l'algorithme ainsi conçu . Nous avons obtenu des résultats de convergence pour les exemples testés .

Voici l'agencement des chapitres de ce mémoire :

Dans le chapitre 2, nous exposons le principe général d'optimisation à plusieurs niveaux ainsi que les simplifications imposées dans l'article de J.F.Barthelemy .

Dans le chapitre 3, nous présentons le problème sous sa forme mathématique ainsi que les notations qui seront utilisées par la suite .

Le chapitre 4 est consacré à l'étude de la linéarisation convexe et de ses principales propriétés . Nous y introduisons le principe de relaxation ainsi que la mise à l'échelle des variables .

Nous réservons le chapitre 5 à l'élaboration de l'algorihtme de résolution par dualité . Les résultats numériques que nous avons obtenus cloturent ce chapitre .

Le chapitre 6 développe les principaux points de l'article de J.F. Barthelemy et explicite plus particulièrement l'algorithme qui y est proposé .

CHAPITRE 2 :

PRINCIPE D'OPTIMISATION

A

PLUSIEURS NIVEAUX

A)INTRODUCTION

Des systèmes complexes d'ingénieurs comme les avions, les voitures, les bâteaux, les centrales électriques sont habituellement décomposables de telle sorte que le tout soit traité comme un assemblage de parties plus petites .

Les ingénieurs ont employé cette technique pour séparer leurs grands modèles en sous-modèles exécutés indépendamment. Récemment , cette approche a été grossie par des méthodes formelles numériques.

De manière schématique, la décomposition peut être présentée comme une pyramide de modules reliés hiérarchiquement, chacun correspondant à un sous-problème du modèle . Ici la procédure globale prend la forme d'une optimisation à plusieurs niveaux dont le but est de satisfaire les contraintes et d'améliorer la performance de tout le système .

B)OPTIMISATION A PLUSIEURS NIVEAUX ET DECOMPOSITION .

L'optimisation à plusieurs niveaux repose sur la décomposition d'un système pour diviser la tâche d'optimisation de ce système en un ensemble de tâches de sous-optimisation et d'une tâche de coordination qui donne la dépendance entre les sous-tâches **[Ref 8]**.

Nous allons l'expliquer en comparant avec l'optimisation sans décomposition .

1) L'optimisation conventionnelle définit pour tout le système un vecteur de variables du modèle : **Z** et un ensemble de contraintes d'inégalité : G(z) .On n'y fait aucune distinction parmi les éléments de **Z** et on n'y distingue pas non plus les contraintes G pouvant appartenir à différents sous-systèmes .

En choisissant une mesure de performance du système comme fonction objectif : F(z), on résout donc le problème d'optimisation

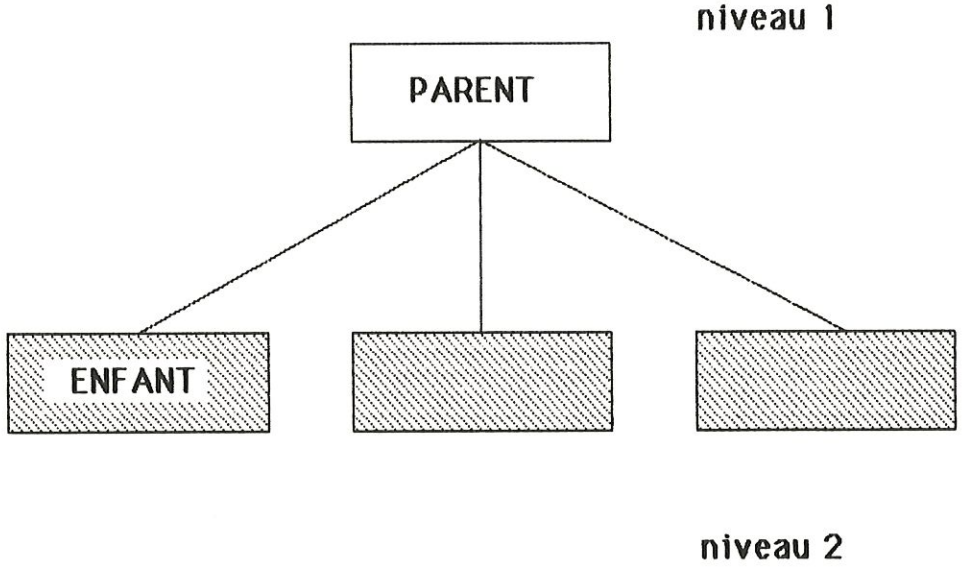
$$\begin{aligned} &\text{MIN } F(z) \\ &\text{sous } G(z) \leq 0 \\ &\qquad z^l \leq z \leq z^u \end{aligned}$$

en utilisant une procédure de programmation non linéaire avec un point de départ : z^0

L'information numérique à propos des valeurs de F,G et de leur gradient qui est nécessaire à la méthode de programmation provient d'analyses de modules du système et d'analyses du système assemblé .

Ceci implique que le système peut être décomposé pour l'analyse mais pas dans le but d'optimisation .

2) Dans une optimisation à plusieurs niveaux, le système est décomposé pour l'analyse et l'optimisation .



L'output du parent devient l'input de l'enfant (de tous les enfants du niveau suivant) . Chaque enfant peut à son tour être parent d'autres enfants à niveau plus bas...

Pour chaque sous système, on définit

---> X un sous-ensemble de Z qui représente les variables locales .

---> g un sous-ensemble de G

---> C une fonction objectif locale .

Pour le problème assemblé on définit aussi

---> F(Y) une fonction objectif

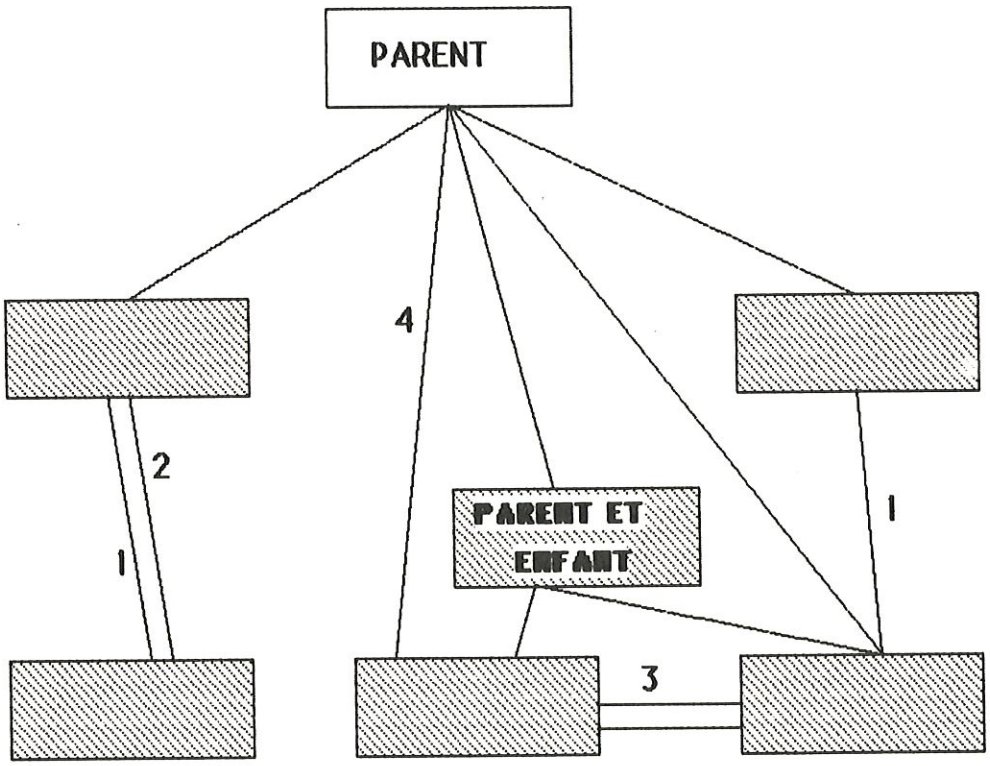
---> h(Y) un sous-ensemble de contraintes où Y représente les variables du modèle encore appelées variables globales .

Il existe de nombreuses méthodes pour optimiser un systeme décomposé . Nous allons expliciter l'algorithme exposé par

J-F BARTHELEMY

1. Initialisation des variables
2. Analyse des sous-problèmes (parents,enfants)
3. Optimisation de chaque sous-problème
   a) les sous-systèmes
   b) le problème assemblé .

Cet algorithme (développé dans le chapitre 6) présuppose que le flot de données dans le système d'analyse soit à sens unique et que chaque enfant ait un seul parent . Ceci est une simplification car les flots peuvent être beaucoup plus compliqués :



On peut donc rencontrer les caractéristiques suivantes :

1) Parents multiples pour un enfant
2) Output d'un enfant nécessaire comme input à l'analyse du parent
3) Output d'un enfant nécessaire comme input à un autre enfant
4) Des canaux input/output de plus de un niveau au dessus ou ou en dessous .

CHAPITRE 3 :

POSITION DU PROBLEME

Notations :

ncy : le nombre de composantes du vecteur Y
ncxi(i) : le nombre de composantes de X_i
nch : le nombre de contraintes globales
i.e. le nombre de contraintes dépendant uniquement de Y
ncg : le nombre de contraintes locales
i.e. le nombre de contraintes dépendant de X
ou encore le nombre de composantes de X
ncgi(i) : le nombre de contraintes locales dépendant de X_i

Hypothèses :

Soient $F : R \longrightarrow R$
$Y \dashrightarrow F(Y)$

où $Y = (y_1\ y_2\ \dots\ y_{ncy})^t$

$h_j : R^{ncy} \longrightarrow R$
$Y \dashrightarrow h_j(Y)$

$h = (h_1\ h_2\ \dots\ h_{nch})^t$

$g_{ij} : R^{ncy} \times R^{ncxi(i)} \longrightarrow R$
$(Y\ ,\ X_i) \dashrightarrow g_{ij}(Y,X_i)$

où $X_i = (x_1\ x_2\ \dots\ x_{ncxi(i)})^t$

$g_i = (g_{i1}\ g_{i2}\ \dots\ g_{incgi(i)})^t$

$g = (g_1\ g_2\ \dots\ g_{ncg})^t$

où $F, g, h \in C^1$

i.e. ces fonctions sont au moins une fois continûment différentiables.

Le problème mathématique d'optimisation qui sera traité dans ce mémoire est :

$$
\begin{cases}
\text{Minimiser} & F(y_1\ y_2 \dots\ y_{ncy}) & \\
\text{sous} & h_j(y_1\ y_2\ \dots\ y_{ncy}) \le 0 & (j=1..nch) \\
 & g_{ij}(y_1\ y_2\ \dots\ y_{ncy}, x_{i1}\ x_{i2}\ \dots\ x_{incxi(i)}) \le 0 & \\
 & & (i=1..ncg\ ,j=1..ncgi(i)) \\
 & y^l_k \le y \le y^u_k & (k=1..ncy) \\
 & x^l_{il} \le x \le x^u_{il} & (i=1..ncg\ ,l=1..ncxi(i))
\end{cases}
$$

ou plus simplement :

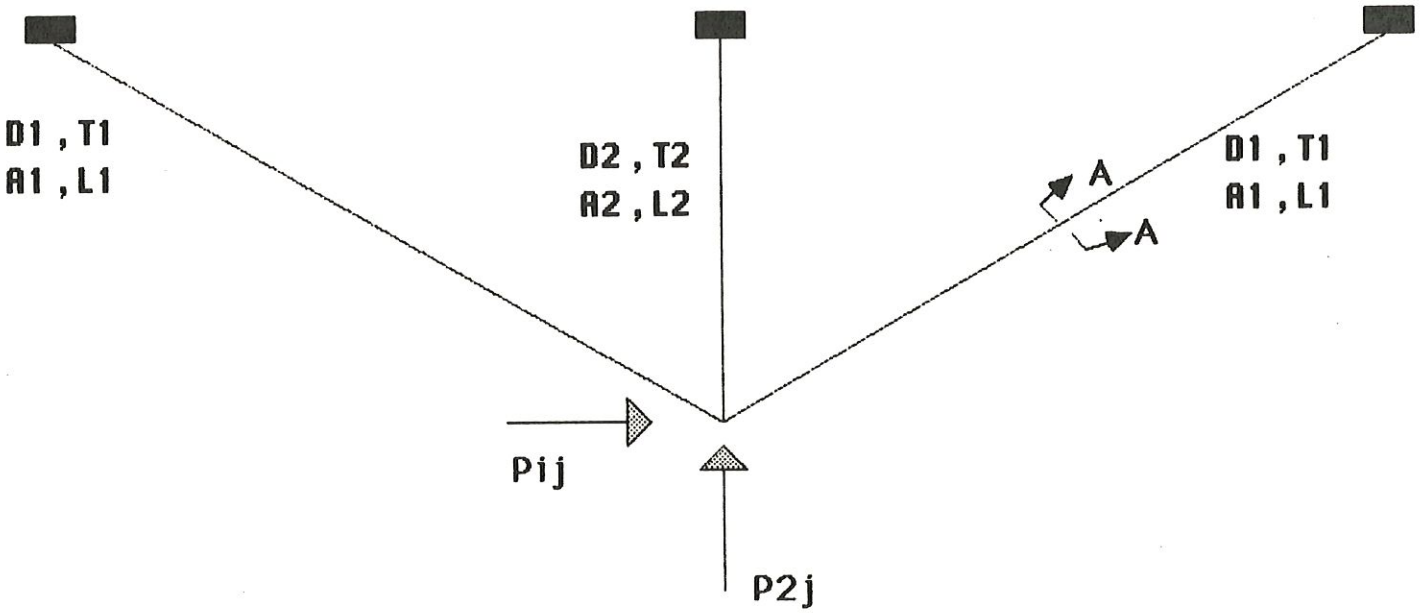
$$
\begin{cases}
\text{Minimiser} & F(Y) & \\
\text{sous} & h(Y) \le 0 & \\
 & g_i(Y,X_i) \le 0 & (i=1..ncg) \\
 & Y^l \le Y \le Y^u & \\
 & X^l_i \le X_i \le X^u_i & (i=1..ncg)
\end{cases}
$$

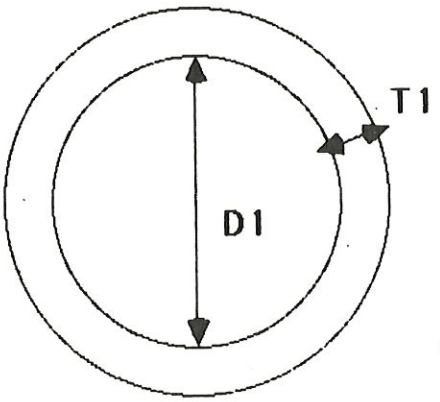
Le caractère particulier du problème, à savoir la differenciation entre les contraintes (et les variables) globales et locales, n'est pas une pure invention gratuite de l'esprit d'un mathématicien . En effet, cela correspond à des problèmes bien réels d'ingénieur .

Nous allons vous donner un exemple type : le " 3-bar truss" ou treillis à trois barres . **[Ref 6]**

Toutefois, notre but n'étant pas d'expliquer un problème d'ingénieur, nous avons choisi un problème avec des données simplifiées :

Formulation d'un problème de treillis à trois barres avec variables locales et contraintes de comportement





A - A

$A1 = \pi \, D1 \, T1$

données et notations générales

Longueur des membres 1 et 3 $L_1 = 4.$ m
Longueur du membre 2 $L_2 = 2.$ m

Charges $P_{1j} = 2. \times 10^5$ N, $P_{2j} = 2. \times 10^5$ N (cas1)
$P_{1j} = 0.$ N, $P_{2j} = 3. \times 10^5$ N (cas2)

Module d'élasticité $E = 2.2 \times 10^{11}$ N/m^2
Constante de crippling $K = .2$
Rapport maximal épaisseur-diamètre $D = .2$

Diamètre et épaisseur minimaux $dmin = tmin = 1. \times 10^{-3}$ m
Diamètre et épaisseur maximaux $dmax = tmax = 1.$ m

Pression maximale $\sigma max = 1. \times 10^9$ N/m^2

position du problème

Trouver la combinaison des variables indépendantes A_1, d_1, A_2, d_2 qui minimise le volume du treillis tout en satisfaisant aux contraintes de pression, buckling et crippling sous les deux cas de charges et aux contraintes géométriques sur le rapport épaisseur-diamètre et les bornes supérieures et inférieures des variables.

Note : Le problème peut être posé en termes de t_1, d_1, t_2, d_2, cependant il ne serait pas décomposable.

volume du treillis

$$V = 2 L_1 A_1 + L_2 A_2 \quad (m^3)$$

contraintes de pression (au nombre de 12)

forme générale $g = |\sigma_{ij}| / \sigma max - 1 \leq 0$

où σ_{ij} est la pression sur la barre i (i=1,2 ou 3) sous le cas de charge j (j=1 ou 2). On peut montrer que :

$$\sigma_{1j} = \frac{P_{1j}}{\sqrt{3}\, A_1} - \frac{P_{2j}}{A_1 + 4 A_2} \quad (N/m^2)$$

$$\sigma_{2j} = - \frac{4\ P_{2j}}{A_1 + 4 A_2} \quad (N/m^2)$$

$$\sigma_{3j} = - \frac{P_{1j}}{\sqrt{3}\, A_1} - \frac{P_{2j}}{A_1 + 4 A_2} \quad (N/m^2)$$

<u>remarque :</u> g n'étant pas différentiable, il convient donc de le remplacer par deux contraintes différentiables:

$$\sigma_{ij} - \sigma max \leq 0$$
$$-\sigma_{ij} - \sigma max \leq 0$$

contraintes de buckling (au nombre de 6)

forme générale $g = - \sigma_{ij} / \sigma_{bi} - 1 \leq 0$

où σ_{ij} sont les pressions du point précédent et σ_{bi} est la pression de buckling sur la barre i et $\pi = 3.14...$

$$\sigma_{bi} = \frac{\pi^2 E d_i^2}{8 L_i^2} \quad N/m^2$$

contraintes de crippling (au nombre de 6)

forme générale $g = -\sigma_{ij} / \sigma_{ci} - 1 \leq 0$

où σ_{ij} sont les pressions du point précédent et σ_{ci} est la pression de crippling sur la barre i

$$\sigma_{ci} = \frac{K_i E_i A_i}{\pi d_i^2} \qquad N/m^2$$

contraintes du rapport épaisseur-diamètre (au nombre de 2)

$$g = \frac{A_i}{\pi\, d_i^2\, dmax} - 1 \leq 0$$

bornes supérieures sur l'épaisseur (au nombre de 2)

$$g = \frac{A_i}{\pi\, d_i\, tmax} - 1 \leq 0$$

bornes inférieures sur l'épaisseur (au nombre de 2)

$$g = 1 - \frac{A_i}{\pi\, d_i\, tmin} \leq 0$$

bornes supérieures sur le diamètre (au nombre de 2)

$$g = d_i / dmax - 1 \leq 0$$

bornes inférieures sur le diamètre (au nombre de 2)

$$g = 1 - d_i / dmin \leq 0$$

notes

1) Ce problème contient 20 contraintes d'ingénieur et 8 bornes sur les variables.

2) Les gradients peuvent être facilement évalués analytiquement.

3) Le niveau *global* implique

variables : A_1, A_2
fonction objectif : V
contraintes : pressions

4) Le niveau *local* implique

variables : d_1, d_2
contraintes: buckling,crippling,bornes sur les variables,
rapport épaisseur-diamètre

CHAPITRE 4 :

LA LINEARISATION CONVEXE

A) INTRODUCTION

Pour résoudre des problèmes d'optimisation non-linéaires, deux approches sont possibles .

La première est basée sur des méthodes générales de programmation non-linéaire (méthodes de pénalisation, de directions admissibles...) . Ces méthodes donnent d'excellents résultats de convergence mais le coût de leur application augmente très fort avec la taille des problèmes .

Dans une seconde approche, le problème d'optimisation est transformé en une suite de sous-problèmes approximants ayant une structure algébrique simple . Les contraintes de bornes étant faciles à traiter restent inchangées . La convergence de ces méthodes dépend de la qualité des approximations utilisées . Si l'approximation est mauvaise, le processus peut diverger ou converger après de grandes oscillations . **[Ref 5]**

B) DIFFERENTES LINEARISATIONS

Linéarisation directe

Il s'agit de linéariser la fonction objectif et les contraintes en fonction des variables directes .

Les sous-problèmes obtenus sont strictement linéaires et le "simplex" peut alors s'appliquer . Cependant, la solution du sous-problème se trouve toujours sur un sommet du domaine admissible . Le processus peut soit diverger, soit encore osciller entre deux sommets non optimaux .

Linéarisation inverse

Il s'agit de linéariser les contraintes en fonction des variables inverses (1/y) et la fonction objectif en fonction des variables directes (y) .

Pour que cette opération soit applicable il faut que les variables (y) soient strictement positives, une simple translation peut l'assurer . Ce problème, après changement de variable z=1/y, n'est pas nécessairement convexe et la résolution du dual peut poser des difficultés, c'est pourquoi il a semblé nécessaire d'obtenir des sous-problèmes convexes .

Linéarisation mixte

Il s'agit de combiner les deux méthodes précitées en linéarisant les fonctions par rapport aux variables directes pour un certain groupe de variables et par rapport aux variables inverses pour le reste .

Ce qui donne pour une fonction $h : R^n \longrightarrow R$

$x \dashrightarrow h(x)$

où $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^t$

linéarisée en x° :

$$h^{\sim}(x;x^\circ) = \sum_{J1} \frac{\partial h}{\partial x_{i|x^\circ}} (x_i - x_i^\circ) + \sum_{J2} \frac{\partial h}{\partial x_{i|x^\circ}} (x_i - x_i^\circ) \frac{x_i^\circ}{x_i} + h(x^\circ)$$

où J1 (J2) est l'ensemble des indices des variables pour lesquelles la linéarisation directe (inverse) est utilisée .

Pour une fonction $g : R^n \times R^m \longrightarrow R$

$$(y , x) \dashrightarrow g(y,x)$$

où

$$y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)^t$$

$$x=(x_1,x_2,\ldots,x_m)^t$$

linéarisée en (y°,x°) :

$$g^{\sim}(y,x ; y^\circ,x^\circ)=\sum_{J1} \frac{\partial g}{\partial x_i}\Big|_{y^\circ,x^\circ} (x_i - x_i^\circ) + \sum_{J2} \frac{\partial g}{\partial x_i}\Big|_{y^\circ,x^\circ} (x_i - x_i^\circ) \frac{x_i^\circ}{x_i}$$

$$+ \sum_{K1} \frac{\partial g}{\partial y_i}\Big|_{y^\circ,x^\circ} (y_i - y_i^\circ) + \sum_{K2} \frac{\partial g}{\partial y_i}\Big|_{y^\circ,x^\circ} (y_i - y_i^\circ) \frac{y_i^\circ}{y_i}$$

où J1 (J2) est l'ensemble des indices des variables x (y) pour lesquelles la linéarisation directe (inverse) est utilisée et où K1 (K2) est l'ensemble des indices des variables x (y) pour lesquelles la linéarisation directe (inverse) est utilisée .

Les calculs effectués pour obtenir ces linéarisations se trouvent en ANNEXE A4.1 .

En choisissant pour la fonction h :

$$J1=\left\{ i \,\middle|\, \frac{\partial h}{\partial x_i}\Big|_{x^\circ} \geq 0 \right\}$$

$$J2=\left\{ i \,\middle|\, \frac{\partial h}{\partial x_i}\Big|_{x^\circ} \leq 0 \right\}$$

Et en choisissant pour la fonction g :

$$J1 = \{ i \mid \frac{\partial g}{\partial x_i | y^\circ, x^\circ} \geq 0 \}$$

$$J2 = \{ i \mid \frac{\partial g}{\partial x_i | y^\circ, x^\circ} \leq 0 \}$$

$$k1 = \{ i \mid \frac{\partial g}{\partial y_i | y^\circ, x^\circ} \geq 0 \}$$

$$K2 = \{ i \mid \frac{\partial g}{\partial y_i | y^\circ, x^\circ} \leq 0 \}$$

on obtient ainsi $h^\sim(x ; x^\circ)$ et $g^\sim(y,x ; y^\circ, x^\circ)$ deux fonctions convexes (ANNEXE A4.2) . Cette linéarisation mixte particulière sera appelée **linéarisation convexe .**

ILLUSTRATION DE LA LINEARISATION CONVEXE

Soit la fonction $g(x)=x^2-2x$.

Dans la figure **[FIG A]** nous avons représenté la linéarisation de cette fonction au point x=2 . La fonction approximante est de la forme

$$g^\sim(x;2) = 2x-4.$$

La figure **[FIG B]** représente la linéarisation convexe de g(x) au point x=0.5 . La fonction approximante est alors de la forme

$$g^\sim(x;0.5) = .25/x - 5/4$$

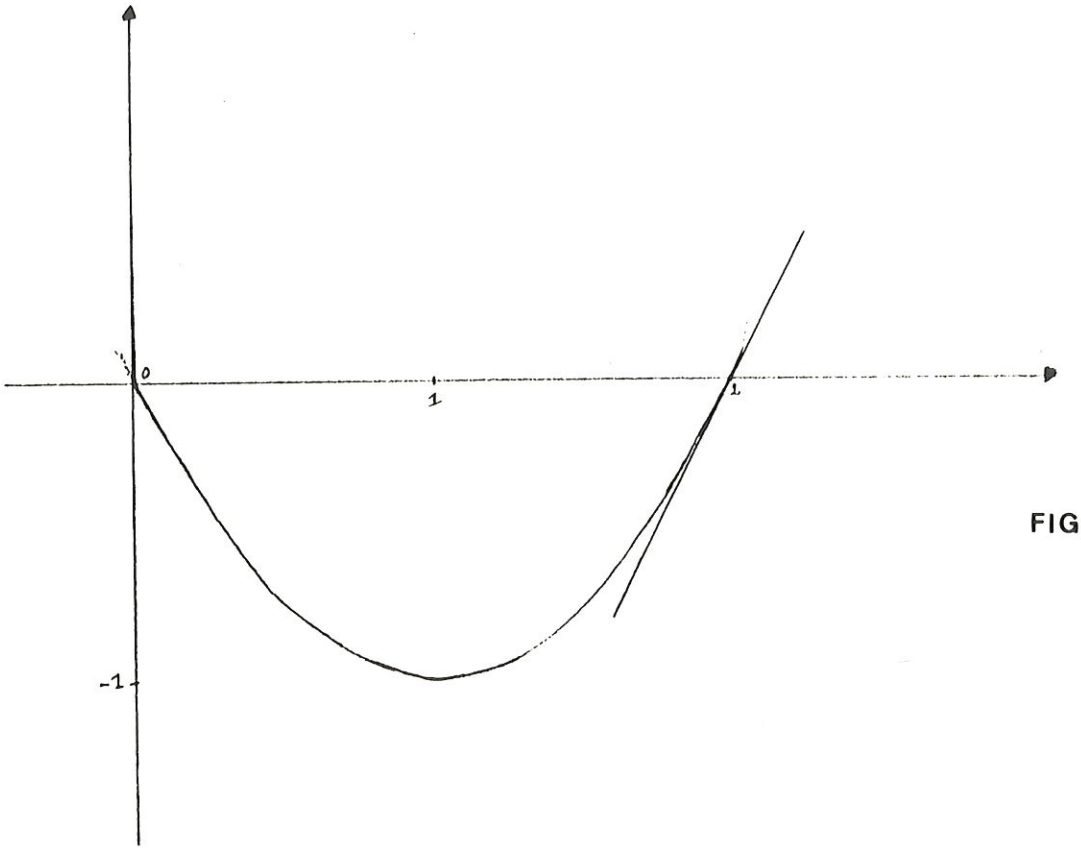


FIG A

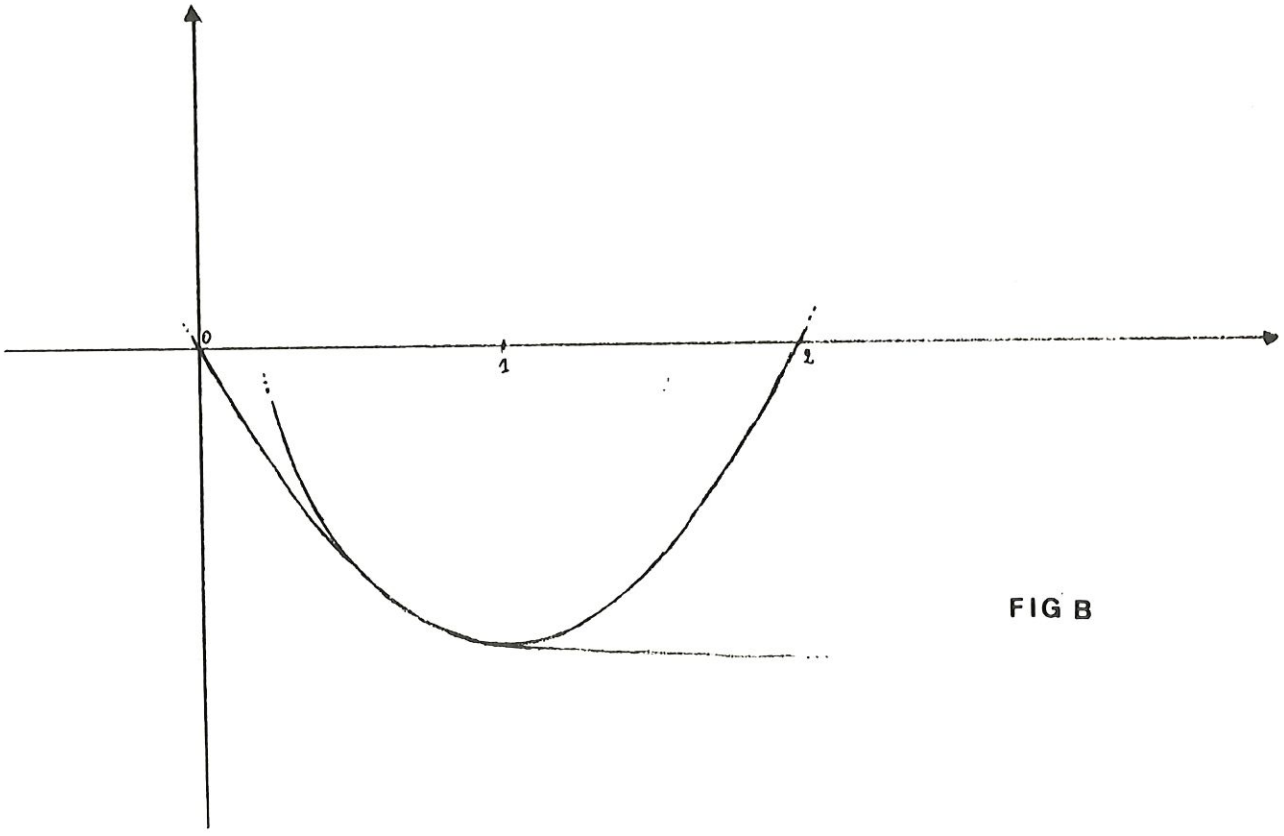


FIG B

C) PROPRIETES DE LA LINEARISATION CONVEXE

Un sous-problème linéarisé en (y°, x°), noté $(\widetilde{SP})^\circ$, aura donc la forme explicite suivante :

$$\text{Min} \sum_{i+} \frac{\partial f}{\partial y_i | x^\circ} (y_i - y_i^\circ) + \sum_{i-} \frac{\partial f}{\partial y_i | x^\circ} (y_i - y_i^\circ) \frac{y_i^\circ}{y_i} + f(y^\circ)$$

S.C

$$\sum_{i+} \frac{\partial h_j}{\partial y_i | x^\circ} (y_i - y_i^\circ) + \sum_{i-} \frac{\partial h_j}{\partial y_i | x^\circ} (y_i - y_i^\circ) \frac{y_i^\circ}{y_i} + h_j(y^\circ) \le 0 \qquad (j=1..nch)$$

$$\sum_{k+} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_{ik} | y^\circ, x^\circ} (x_{ik} - x_{ik}^\circ) + \sum_{k-} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_{ik} | y^\circ, x^\circ} (x_{ik} - x_{ik}^\circ) \frac{x_{ik}^\circ}{x_{ik}}$$

$$+ \sum_{t+} \frac{\partial g_{ij}}{\partial y_t | y^\circ, x^\circ} (y_t - y_t^\circ) + \sum_{t-} \frac{\partial g_{ij}}{\partial y_t | y^\circ, x^\circ} (y_t - y_t^\circ) \frac{y_t^\circ}{y_t}$$

$$+ g(y^\circ, x^\circ) \le 0 \qquad (i=1..ncg\ ,\ j=1..ncgi(i))$$

$$0 < y^l_t \le y_t \le y^u_t \qquad (t=1..ncy)$$

$$0 < x^l_{ik} \le x_{ik} \le x^u_{ik} \qquad (i=1..ncg, k=1..ncxi(i))$$

où

pour chaque fonction f, h_j

la somme indicée i+ (resp i-)

est la somme sur les indices i tels que la dérivée par rapport à la variable yi au point y° est ≥ 0 (resp ≤ 0)

pour chaque fonction g_{ij}

la somme indicée t+ (resp t-)

est la somme sur les indices t tels que la dérivée par rapport à la variable y_t au point y° est ≥ 0 (resp ≤ 0)

tandis que la somme indicee k+ (resp k-)

est la somme sur les indices k tels que la dérivée par rapport à la variable x_{ik} au point x° est ≥ 0 (resp ≤ 0).

Ces groupes d'indices intervenant dans les sommes indicées + (resp -) peuvent donc être différents pour chaque fonction. Ces notations seront employées lors de chaque linéarisation .

Propriété 1 : Convexité

Comme démontré en ANNEXE A4 .2, chaque sous-problème linéarisé reste convexe . Cette propriété est intéressante car tout point de Kuhn et Tucker est minimum global de ce sous-problème et réciproquement .

Propriété 2 : Séparabilité

Cette propriété s'avèrera essentielle lors de la résolution du problème dual .

Définition : Un problème du type

$$\min f(x)$$
$$\text{sc } h(x) \leq 0$$

où f,h sont des fonctions de R^N à valeurs réelles

est dit *séparable* s'il peut se mettre sous la forme suivante:

$$\min \Sigma_i f_i(x_i)$$
$$\text{sc } \Sigma_i h_i(x_i) \leq 0$$

où f_i, h_i sont des fonctions de R dans R et

$x = (x_1, \ldots, x_N)^t$

Ce facteur est un contrôle de la qualite de l'approximation .

Parmi toutes les linéarisations mixtes possibles, la linéarisation convexe est la plus conservative . Ceci signifie qu'elle raréfie le fait que le domaine approximant soit trop grand par rapport au domaine initial et donc elle raréfie le fait que le point optimal du sous-problème n'est plus admissible pour le domaine de départ .

Il faut toutefois remarquer qu'il existe encore des cas où le domaine obtenu par la linéarisation convexe n'est pas totalement inclus dans le domaine initial .

D) SCALING

En vue d'améliorer l'efficacité et la fiabilité du procédé d'optimisation numérique, nous allons mettre les variables à l'echelle . Une formulation pratique d'un problème est telle que toutes les composantes des fonctions après scaling aient le même ordre de grandeur . **[Ref 1]**

Une forme simple de scaling est de normaliser chaque variable du problème . Dans ce cas la matrice de scaling sera

$$D = \begin{bmatrix} \frac{1}{|x1|} & 0 \ldots & & 0 \\ 0 & \frac{1}{|x2|} & 0 \ldots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 \ldots & & & \frac{1}{|xn|} \end{bmatrix}$$

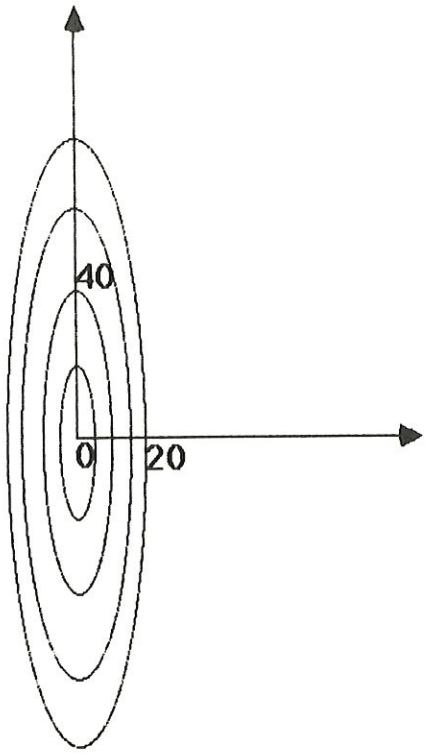
Cette matrice a pour effet de mettre chaque variable sur la même base . Notons que toutes les matrices de scaling sont des matrices diagonales . Remarquons aussi que pour notre problème, les valeurs absolues peuvent être omises car toutes les variables sont strictement positives .

Voici un exemple d'effet du scaling :

Soit la fonction $F(x1,x2) = (x1/5)^2 + (x2/20)^2$

Nous avons tracé en (Fig 1) les courbes de niveau de cette fonction qui sont une série d'ellipses .

[fig 1]



Courbes de niveau de $F(x1,x2)= (x1/5)^2 + (x2/20)^2$

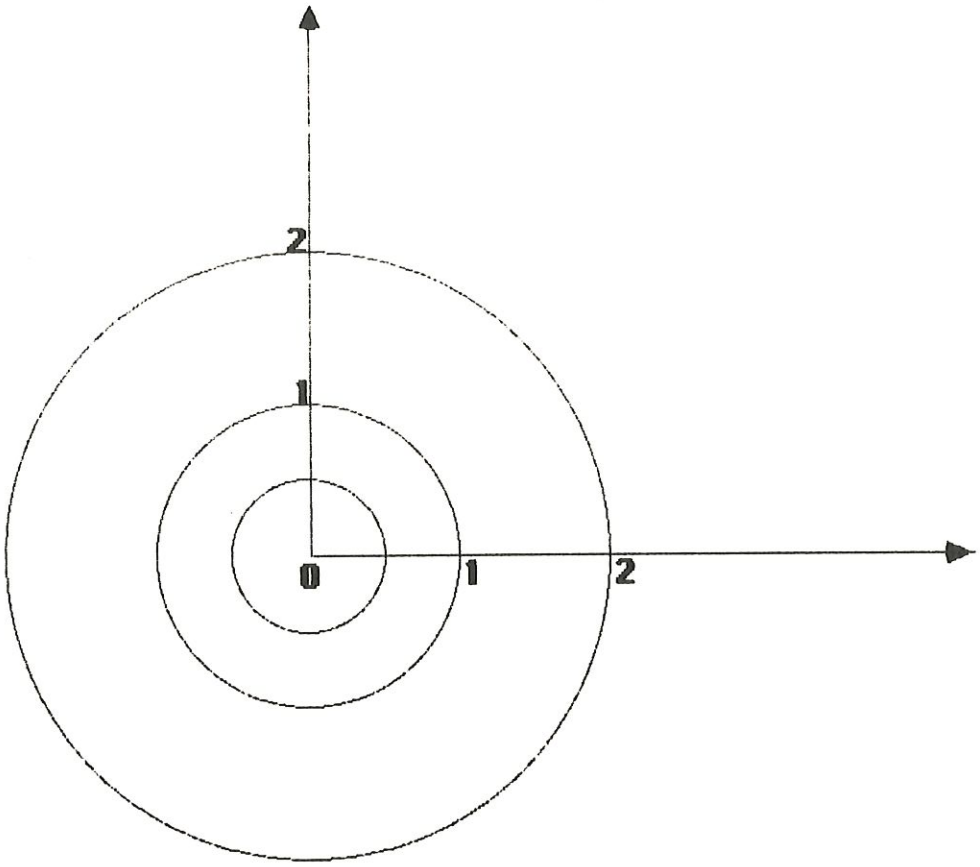
Posons maintenant $x1 = 5\, x1'/\sqrt{2}$

$x2 = 20\, x2'/\sqrt{2}$

La fonction après scaling devient $F(x1',x2') = (0.5)(x1'^2+x2'^2)$

La figure (Fig 2) nous montre que les courbes de niveau sont maintenant des cercles . Pour obtenir le minimum x^* du problème original, on n'a plus qu'à refaire le changement d'échelle inverse et la valeur de la fonction reste la même avec ou sans scaling

$$F(x1,x2) = F(x1',x2')$$



[fig 2]

Courbes de niveau de F(x1',x2')

E) INTRODUCTION A LA RELAXATION

Remarquons qu'il peut être nécessaire de démarrer la méthode en un point non admissible . Puisque l'approximation utilisée est conservative, partir d'un tel point peut réduire la taille du domaine admissible et il est possible que l'approximation initiale n'ait pas de solution admissible si elle est générée en un point éloigné du domaine admissible . Dans ce cas, il est nécessaire d'employer une technique de relaxation .

F) NORMALISATION D'UN SOUS-PROBLEME

Dans le but de simplifier les calculs, nous allons normaliser le sous-problème $(SP^{\sim})^{\circ}|(y^{\circ},x^{\circ})$

Pour cela, effectuons le changement de variables

$$y_i' = \frac{y_i}{y_i^{\circ}} \qquad (i=1..ncy)$$

$$x_{it}' = \frac{x_{it}}{x_{it}^{\circ}} \qquad (i=1..ncg\ ,\ j=1..ncxi(i))$$

Par la formule de dérivation composée nous obtenons

$$\frac{\partial f}{\partial y_i'} = \frac{\partial f}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial y_i'} = \frac{\partial f}{\partial y_i} y_i^{\circ}$$

$$\frac{\partial h_j}{\partial y_i'} = \frac{\partial h_j}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial y_i'} = \frac{\partial h_j}{\partial y_i} y_i^{\circ}$$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial y_i'} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial y_i'} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial y_i} y_i^{\circ}$$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_{it}'} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_{it}}\frac{\partial x_{it}}{\partial x_{it}'} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_{it}} x_{it}^{\circ}$$

d'où

$$\frac{\partial f}{\partial y_i' \,|\, (y_i'=1)_{i=1..ncy}} = \frac{\partial f}{\partial y_i \,|\, (y_i=y_i^\circ)_{i=1..ncy}} \; y_i^\circ$$

que l'on notera

$$\frac{\partial f}{\partial y_i' \,|\, 1} = \frac{\partial f}{\partial y_i \,|\, y_i^\circ} \; y_i^\circ$$

Note : Ce changement de variable est utilisé pour obtenir le sous-problème (linéarisé convexe) explicite du chapitre 5 .

CHAPITRE 5 :

OPTIMISATION A UN NIVEAU

RESOLUTION PAR DUALITE

5.1 ALGORITHME

5.1.0 Principe de l'algorithme

1) INITIALISATION

$X = X^{\circ}$
$Y = Y^{\circ}$
iter = 0

2) CRITERE D'ARRET

Si point de Kuhn et Tucker : STOP
Sinon : aller en 3)

3) ETAPE PRINCIPALE

3.1) Création d'un sous-problème linéarisé convexe en X,Y

3.2) Résolution de ce sous-problème par méthode duale
Solution : X^*, Y^*

3.3) $X = X^*$
$Y = Y^*$
iter = iter + 1

3.4) Retour en 2)

L'ORGANIGRAMME se trouve en page 5.26

5.1.1 Routine demandée à l'utilisateur

Nous demandons une routine qui fournit les valeurs de la fonction objectif et des contraintes en un point fixé ainsi que les gradients évalués en ce point . [cfr page 5.22]

5.1.2 Création d'un sous-problème linéarisé convexe

Le sous-problème linéarisé convexe s'écrit :

Minimiser $f(Y^{(k)}) + \sum_{p-} \frac{\partial f}{\partial y'_p \mid y'=1} - \sum_{p+} \frac{\partial f}{\partial y'_p \mid y'=1}$

$$+ \sum_{p+} \frac{\partial f}{\partial y'_p \mid y'=1} y'_p - \sum_{p-} \frac{\partial f}{\partial y'_p \mid y'=1} \frac{1}{y'_p}$$

Sous $h_i(Y^{(k)}) + \sum_{p-} \frac{\partial h_i}{\partial y'_p \mid y'=1} - \sum_{p+} \frac{\partial h_i}{\partial y'_p \mid y'=1}$

$$+ \sum_{p+} \frac{\partial h_i}{\partial y'_p \mid y'=1} y'_p - \sum_{p-} \frac{\partial h_i}{\partial y'_p \mid y'=1} \frac{1}{y'_p} \leq 0$$

(i=1..nch)

$$g_{ij}(Y^{(k)}) + \sum_{p-} \frac{\partial g_{ij}}{\partial y'_p \mid y'=1} - \sum_{p+} \frac{\partial g_{ij}}{\partial y'_p \mid y'=1}$$

$$+ \sum_{p+} \frac{\partial g_{ij}}{\partial y'_p \mid y'=1} y'_p - \sum_{p-} \frac{\partial g_{ij}}{\partial y'_p \mid y'=1} \frac{1}{y'_p}$$

$$+ \sum_{p-} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x'_{ip} \mid x'_i=1} - \sum_{p+} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x'_{ip} \mid x'_i=1}$$

$$+ \sum_{p+} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x'_{ip} \mid x'_i=1} x_{ip} - \sum_{p-} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x'_{ip} \mid x'_i=1} \frac{1}{x'_{ip}} \leq 0 \quad \ldots$$

$$\ldots \qquad (i = 1..ncg\ ,\ j = 1..ncgi(i))$$

$$y'^{l}_{p} \le y'_{p} \le y'^{u}_{p} \qquad (p = 1..ncy)$$
$$x'^{l}_{ip} \le x'_{ip} \le x'^{u}_{ip} \quad (i = 1..ncg\ ,\ p = 1..ncxi(i))$$

où
$$y'_i = \frac{y_i}{y_i^{(k)}}$$
$$Y' = (y_1 \quad \ldots \quad y_{ncy})^t$$
$$Y' = 1 \Leftrightarrow y'_i = 1 \qquad (i=1..ncy)$$
$$x'_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_{ij}^{(k)}}$$
$$x'_i = (x'_{i1} \quad \ldots \quad x'_{incxi(i)})^t$$
$$X' = (x'_1 \quad \ldots \quad x'_{ncg})$$
$$x'_i = 1 \Leftrightarrow x'_{ij} = 1 \qquad (j=1..ncxi(i))$$

<u>Remarque</u> : Dorénavant, pour des raisons de facilité de notation nous omettrons les " ' " en suscrit et nous travaillerons toujours avec ces notations .

Pour l'implémentation de ce sous-problème, nous n'avons besoin que des valeurs fournies par l'utilisateur :

1) $f(Y^{(k)})$
$h_i(Y^{(k)})$ $\qquad (i=1..nch)$
$g_{ij}(Y^{(k)},X_i^{(k)})$ $\qquad (i=1..ncg \quad j=1..ncgi(i))$

2) $\nabla_Y f(Y^{(k)})$
$\nabla_Y h_i(Y^{(k)})$ $\qquad (i=1..nch)$
$\nabla_Y g_{ij}(Y^{(k)},X_i^{(k)})$
$\nabla_{Xl} g_{ij}(Y^{(k)},X_i^{(k)})$ $\qquad ((i=1..ncg \quad j=1..ncgi(i))$

En effet, par le changement de variable expliqué au chapitre 4 ("scaling"), nous avons établi que :

$$\frac{\partial f}{\partial y'_p \mid y'=1} = \frac{\partial f}{\partial y_p \mid y=y^{(k)}} \; y_p^{(k)}$$

Ainsi nous calculons les termes constants et les coefficients de la linéarisation .

3) les bornes des variables X,Y .

Pour trouver les bornes des variables X',Y' , il suffit d'appliquer le changement de variables du chapitre 4 ("scaling") aux bornes de X,Y .

5.1.3 Relaxation d'un sous-problème linéarisé en $Y^{(k)}, X_i^{(k)}$

Lorsque le domaine admissible d'un sous-problème linéarisé est vide, pour obtenir à l'itération suivante un point "le plus admissible possible" , chaque problème est modifié par l'introduction de variables artificielles - une par contrainte primale - de telle sorte que le sous-problème devient :

$(SP^{\sim})^{(k)}$

$$\text{Min } f^{\sim}(Y;Y^{(k)}) + \sum_{i=1..nch}(d_i z_i + d_i z_i^2) + \sum_{i=1..ncg}\sum_{j=1..ncgi(i)}(d_{ij} z_{ij} + d_{ij} z_{ij}^2)$$

$$\text{Sous } h_j^{\sim}(Y;Y^{(k)}) - z_j \le 0 \qquad (j=1..nch)$$
$$g_{ij}^{\sim}(Y,X_i;Y^{(k)},X_i^{(k)}) - z_{ij} \le 0 \quad (i=1..ncg \; j=1..ncgi(i))$$

$$Y^l \le Y \le Y^u$$
$$X^l \le X \le X^u$$
$$z_i \ge 0 \qquad (i=1..nch)$$
$$z_{ij} \ge 0 \qquad (i=1..ncg \; j=1..ncgi(i))$$

avec $d_{i(j)} > 0$ tq chaque $d_{i(j)}$ doit être un nombre relativement grand .

De toute evidence, ce problème admet toujours une solution admissible (pour tout Y,X il est possible de choisir z_i et z_{ij} de telle sorte que les contraintes deviennent satisfaites).

Il est évident que si les coefficients d_i et d_{ij} sont suffisamment grands, alors toutes les variables artificielles z_i et z_{ij} deviendront automatiquement nulles dans la solution optimale de $(SP^{\sim})^{(k)}$, pourvu que le problème $(SP)^{(k)}$ soit admissible.

D'autre part, si le domaine de $(SP)^{(k)}$ est vide, alors certains z_i et/ou z_{ij} seront strictement positifs dans la solution optimale de $(SP^{\sim})^{(k)}$.

Cependant, à cause du choix de "grands" d_i et d_{ij} les variables z_i et z_{ij} ne prendront jamais des valeurs excessives ; c'est dans ce sens que l'on dit que la solution X',Y' sera la plus admissible possible.

Ceci n'entrave en aucun cas la méthode de résolution par dualité.

5.1.4 Utilisation de E04KBF (library NAG) pour la minimisation de la fonction duale

5.1.4.1 La routine E04KBF

A. BUT

Il s'agit d'un algorithme Quasi-Newton pour trouver le minimum d'une fonction de plusieurs variables sous contraintes de bornes inférieures.

Les dérivées premières sont requises.

La routine est conçue pour des fonctions deux fois continûment differentiables.

B. EMPLOI

Nous utiliserons cette routine pour trouver le maximum de la fonction duale. Nous allons donc chercher le minimum de (- la fonction duale). Pour ce faire, nous passerons à la routine le gradient de (-1)* la fonction duale et la valeur de (-1)*la fonction duale.

C. NOTRE CHOIX DES PARAMETRES D'ENTREE

E04KBF (N,Funct,Monit,Iprint,Locsch,Intype,Minlin,Maxcal,Eta,
Xtol,Stepmx,Fest,Ibound,Bl,Bu,X,Hesl,Lh,Hesd,Istate,F,
G,Iw,Liw,W,Lw,Ifail)

N : nombre de contraintes primales .
Funct : routine qui calcule les valeurs de (-1)*fonction duale et son gradient (cfr D) .
Monit : routine d'impression des principaux résultats (solution , valeur , gradients , itération)
Iprint : laissé au choix de l'utilisateur
0 pour n'imprimer que la dernière itération
1 pour imprimer à chaque itération
Locsch : .true. pour que l'on effectue une recherche linéaire .
Intype : 0 car on ne fournit à la routine aucune information sur le hessien de la fonction duale .
Minlin : E04LBS car nous avons choisi d'effectuer une recherche linéaire qui utilise à la fois la valeur de la fonction et ses dérivées premières .
Maxcal : 200*N comme conseillé .
Eta : 0.9 (recommandé lors de l'emploi de la routine E04LBS) .
Xtol : précision de la solution duale
Xtol est fournie par l'utilisateur .
Stepmx: 100000. comme suggéré par la documentation de E04KBF .
Fest : sous-estimation du minimum de (-1)*la fonction duale (choix de Fest en ANNEXE A.5.3) .
Ibound : 2 car les seules bornes sont la non-négativité des variables duales .
Bl,Bu : ne sont pas initialisés car Ibound=2 .
X : valeur initiale des multiplicateurs de Lagrange .
Hesl,Hesd: ne sont pas initialisés car Intype=0 .
Lh : (N*(N-1)/2) = max (N*(N-1)/2,1) car étant donnée la structure du problème initial : il existe toujours deux contraintes au moins et donc au moins deux multiplicateurs de Lagrange .
Dans ce cas : $(N*(N-1)/2) \geq 1 \quad \forall N \geq 1$
Istate,F,G: ne sont pas initialisés car Intype=0 .

Iw,W : ne sont pas initialisés car ce sont des tableaux de travail de la routine .

Liw,Lw : leur longueur respective doit néanmoins être initialisée :

Liw=2

Lw=9*N

Ifail : 0 comme suggéré .

D. GESTION DU PARAMETRE D'ERREUR DE LA ROUTINE

IFAIL = 2

Il y a eu plus de maxcal évaluations de fonction . On considère que le nouveau point dual atteint est quand même un minimum de (-1)*la fonction duale . On passe alors à l'étape suivante de notre algorithme .

IFAIL = 3 , 5

Deux hypothèses sont possibles : soit la recherche linéaire a échoué, soit toutes les conditions requises pour un minimum ne sont pas toutes atteintes .

On considère néanmoins que le nouveau point dual atteint est un minimum de (-1)*la fonction duale . On passe alors à l'étape suivante de notre algorithme .

IFAIL = 4

Il y a eu un "overflow" lors du calcul des facteurs de Cholesky dans E04KBF . Nous recommençons alors un nouvel appel à E04KBF.

5.1.4.2 La fonction duale

Soit le problème linéarisé relaxé en $Y^{(k)}, X^{(k)}$

$(SP^{\sim})^{(k)}$

$$\begin{cases} \text{Min} \quad f^{\sim}(Y\,;\,Y^{(k)}) \\ \text{Sous} \quad h_i^{\sim}(Y\,;\,Y^{(k)}) - z_i \le 0 \qquad (i=1..nch) \\ \qquad g_{ij}^{\sim}(Y,X_i\,;\,Y^{(k)},X_i^{(k)}) - z_{ij} \le 0 \qquad (i=1..ncg\ ,\ j=1..ncgi(i)) \\ \qquad Y^l \le Y \le Y^u \\ \qquad X_i^l \le X_i \le X_i^u \qquad (i=1..ncg) \end{cases}$$

Le problème dual qui lui est associé est de la forme suivante :

$$\begin{cases} \text{Maximiser} \quad \theta(u) \\ \text{Sous} \quad u_i \geq 0 \qquad (i=1..nch) \\ \qquad\quad u_{ij} \geq 0 \qquad (i=1..ncg\ ,\ j=1..ncgi(i)) \end{cases}$$

Le caractère séparable du problème $(SP^{\sim})^{(k)}$ va nous permettre d'exprimer la fonction duale de manière explicite :

$$\theta(u) = \underset{X}{\text{Min}} \Big\{ \sum_{i+} \frac{\partial f}{\partial y_i}\Big|_1 y_i - \sum_{i-} \frac{\partial f}{\partial y_i}\Big|_1 \frac{1}{y_i} +$$

$$\sum_{i-} \frac{\partial f}{\partial y_i}\Big|_1 - \sum_{i+} \frac{\partial f}{\partial y_i}\Big|_1 + f(Y^{(k)}) +$$

$$\sum_{i=1..nch} d_i(z_i + z_i^2) + \sum_{i=1..ncg} \sum_{j=1..ncgi(i)} d_{ij}(z_{ij} + z_{ij}^2)$$

$$+ \sum_{j=1..nch} u_j \Big(\sum_{i+} \frac{\partial h_j}{\partial y_i}\Big|_1 y_i - \sum_{i-} \frac{\partial h_j}{\partial y_i}\Big|_1 \frac{1}{y_i} +$$

$$\sum_{i-} \frac{\partial h_j}{\partial y_i}\Big|_1 - \sum_{i+} \frac{\partial h_j}{\partial y_i}\Big|_1 + h_j(Y^{(k)}) - z_j \Big)$$

$$+ \sum_{i=1..ncg} \sum_{j=1..ncgi(i)} u_{ij} \Big(\sum_{k+} \frac{\partial g_{ij}}{\partial y_k}\Big|_1 y_k -$$

...

$$\sum_{k-} \frac{\partial g_{ij}}{\partial y_k}\Big|_1 \frac{1}{y_k} + \sum_{k+} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_{ik}}\Big|_1 x_{ik} -$$

$$\sum_{k-} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_{ik}}\Big|_1 \frac{1}{x_{ik}} - \sum_{k+} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_{ik}}\Big|_1 +$$

$$\sum_{k-} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_{ik}}\Big|_1 - \sum_{k+} \frac{\partial g_{ij}}{\partial y_k}\Big|_1 + \sum_{k-} \frac{\partial g_{ij}}{\partial y_k}\Big|_1 +$$

$$g_{ij}(Y^{(k)}, X_i^{(k)}) - z_{ij}) \}$$

où $\mathbf{X} = \{ Y,X,Z \text{ tq } Y^l \le Y \le Y^u \text{ et } X_i^l \le X_i \le X_i^u \ (i=1..ncg) \text{ et } Z \ge 0 \}$

$$\theta(u) = \min_{Y^l \le Y \le Y^u} \{ \sum_{i+} \frac{\partial f}{\partial y_i}\Big|_1 y_i - \sum_{i-} \frac{\partial f}{\partial y_i}\Big|_1 \frac{1}{y_i} +$$

$$+ \sum_{j=1..nch} u_j \left(\sum_{i+} \frac{\partial h_j}{\partial y_i}\Big|_1 y_i - \sum_{i-} \frac{\partial h_j}{\partial y_i}\Big|_1 \frac{1}{y_i} \right)$$

$$+ \sum_{i=1..ncg} \sum_{j=1..ncgi(i)} u_{ij} \left(\sum_{k+} \frac{\partial g_{ij}}{\partial y_k}\Big|_1 y_k - \right.$$

$$\left. \sum_{k-} \frac{\partial g_{ij}}{\partial y_k}\Big|_1 \frac{1}{y_k} \right) \} +$$

...

$$\underset{X^l \le X \le X^u}{\text{Min}} \Big\{ \sum_{i=1..ncg} \sum_{j=1..ncgi(i)} u_{ij} \Big(\sum_{k+} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_{ik}\,|1}\, x_{ik} - \sum_{k-} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_{ik}\,|1}\, \frac{1}{x_{ik}} \Big) \Big\} +$$

$$\underset{z_i \ge 0}{\text{Min}} \Big\{ \sum_{i=1..nch} d_i (z_i + z_i^2) \Big\} +$$

$$\underset{z_{ij} \ge 0}{\text{Min}} \Big\{ \sum_{i=1..ncg} \sum_{j=1..ncgi(i)} d_{ij} (z_{ij} + z_{ij}^2) \Big\} +$$

$$\sum_{i-} \frac{\partial f}{\partial y_i\,|1} - \sum_{i+} \frac{\partial f}{\partial y_i\,|1} + f(Y^{(k)}) +$$

$$\sum_{j=1..nch} u_j \Big(\sum_{i-} \frac{\partial h_j}{\partial y_i\,|1} - \sum_{i+} \frac{\partial h_j}{\partial y_i\,|1} + h_j(Y^{(k)}) \Big) +$$

$$\sum_{i=1..ncg} \sum_{j=1..ncgi(i)} u_{ij} \Big(\sum_{k-} \frac{\partial g_{ij}}{\partial y_k\,|1} - \sum_{k+} \frac{\partial g_{ij}}{\partial y_k\,|1} + \sum_{k-} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_{ik}\,|1} - \sum_{k+} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_{ik}\,|1} + g_{ij}(Y^{(k)}, X_i^{(k)}) \Big)$$

En utilisant le caractère séparable on peut encore décomposer ce problème en petits problèmes à une variable :

$$\theta(u) = \sum_{k=1..ncy} \min_{y_k^l \le y_k \le y_k^u} (\mathcal{L}_k(y_k,u)) +$$

$$\sum_{i=1..ncg}\sum_{j=1..ncxi(i)} \min_{x_{ij}^l \le x_{ij} \le x_{ij}^u} (k_{ij}(x_{ij},u)) +$$

$$\sum_{i=1..nch} \min_{z_i \ge 0} (d_i z_i + d_i z_i^2 - u_i z_i) +$$

$$\sum_{i=1..ncg}\sum_{j=1..ncgi(i)} \min_{z_{ij} \ge 0} (d_{ij} z_{ij} + d_{ij} z_{ij}^2 - u_{ij} z_{ij}) + Cte$$

où

a)

$$\text{si } \frac{\partial f}{\partial y_k|1} \ge 0$$

****

$$\mathcal{L}_k(y_k,u) = \frac{\partial f}{\partial y_k|1} y_k + \sum_{i+} \frac{\partial h_i}{\partial y_k|1} y_k u_i - \sum_{i-} \frac{\partial h_i}{\partial y_k|1} \frac{1}{y_k} u_i$$

$$+ \sum_{i=1..ncg}\sum_{j+} \frac{\partial g_{ij}}{\partial y_k|1} y_k u_{ij} -$$

$$\sum_{i=1..ncg}\sum_{j-} \frac{\partial g_{ij}}{\partial y_k|1} \frac{1}{y_k} u_{ij}$$

b)

si $\dfrac{\partial f}{\partial y_k||1} \leq 0$

****

$$\mathcal{L}_k\,(y_k,u) = -\frac{\partial f}{\partial y_k||1}\,y_k + \sum_{i+}\frac{\partial h_i}{\partial y_k||1}\,y_k\,u_i - \sum_{i-}\frac{\partial h_i}{\partial y_k||1}\,\frac{1}{y_k}\,u_i$$

$$+ \sum_{i=1..ncg}\sum_{j+}\frac{\partial g_{ij}}{\partial y_k||1}\,y_k\,u_{ij} -$$

$$\sum_{i=1..ncg}\sum_{j-}\frac{\partial g_{ij}}{\partial y_k||1}\,\frac{1}{y_k}\,u_{ij}$$

c)

$$\mathcal{K}_{ij}\,(x_{ij},u) = \sum_{k+}u_{ik}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_{ij}||1}\,x_{ij} - \sum_{k+}u_{ik}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_{ij}||1}\,\frac{1}{x_{ij}}$$

d)

$$Cte = \sum_{i-} \frac{\partial f}{\partial y_i}\Big|_1 - \sum_{i+} \frac{\partial f}{\partial y_i}\Big|_1 + f(Y^{(k)}) +$$

$$+ \sum_{j=1..nch} u_j \left(\sum_{i-} \frac{\partial h_j}{\partial y_i}\Big|_1 - \sum_{i+} \frac{\partial h_j}{\partial y_i}\Big|_1 + h_j(Y^{(k)}) \right)$$

$$+ \sum_{i=1..ncg} \sum_{j=1..ncgi(i)} u_{ij} \left(\sum_{k-} \frac{\partial g_{ij}}{\partial y_k}\Big|_1 - \sum_{k+} \frac{\partial g_{ij}}{\partial y_k}\Big|_1 + \right.$$

$$\left. \sum_{k-} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_{ik}}\Big|_1 - \sum_{k+} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_{ik}}\Big|_1 + g_{ij}(Y^{(k)}, X_i^{(k)}) \right)$$

Comme nous faisons appel à la routine E04KBF, nous avons besoin de connaître le gradient de la fonction duale . Heureusement, la $i^{ème}$ composante de ce gradient est la $i^{ème}$ contrainte du problème primal correspondant (cfr ANNEXE A 5.1).

5.1.4.3 Evaluation des variables primales en fonction des mutliplicateurs de Lagrange

En notant

$$C_k = \sum_{i+} \frac{\partial h_i}{\partial y_k}\Big|_1 u_i + \sum_{i=1..ncg} \sum_{j+} \frac{\partial g_{ij}}{\partial y_k}\Big|_1 u_{ij} \geq 0$$

$$D_k = \sum_{i-} \frac{\partial h_i}{\partial y_k}\Big|_1 u_i + \sum_{i=1..ncg} \sum_{j-} \frac{\partial g_{ij}}{\partial y_k}\Big|_1 u_{ij} \leq 0$$

$$W_{ij} = \sum_{k+} u_{ik} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_{ij}||} \geq 0$$

$$V_{ij} = \sum_{k-} u_{ik} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_{ij}||} \leq 0$$

Nous obtenons :

a) si $\frac{\partial f}{\partial y_k||} \geq 0$

****

$$\mathcal{L}_k (y_k,u) = \frac{\partial f}{\partial y_k||} y_k + C_k y_k - D_k \frac{1}{y_k}$$

b) si $\frac{\partial f}{\partial y_k||} \leq 0$

****

$$\mathcal{L}_k (y_k,u) = - \frac{\partial f}{\partial y_k||} \frac{1}{y_k} + C_k y_k - D_k \frac{1}{y_k}$$

c)

$$\mathcal{K}_{ij} (x_{ij},u) = W_{ij} x_{ij} - V_{ij} \frac{1}{x_{ij}}$$

A) La recherche du minimum de $\mathcal{L}_k (y_k,u)$ sur le domaine $[y_k^l, y_k^u]$ se trouve en Annexe 2 et permet d'exprimer y_k en fonction de u :

si $\frac{\partial f}{\partial y_k|1} > 0$

****

$$y_k(u) = \left\{ \frac{-D_k}{(\partial f/\partial Y_k|_1)+C_k} \right\}^{1/2} \quad si\ (y_k^l)^2 \leq \frac{-D_k}{(\partial f/\partial Y_k|_1)+C_k} \leq (y_k^u)^2$$

$$= y_k^u \quad si\ \frac{-D_k}{(\partial f/\partial Y_k|_1)+C_k} \geq (y_k^u)^2$$

$$= y_k^l \quad si\ \frac{-D_k}{(\partial f/\partial Y_k|_1)+C_k} \leq (y_k^l)^2$$

si $\frac{\partial f}{\partial y_k|1} < 0$

****

$$y_k(u) = \left\{ - \frac{(\partial f/\partial Y_k|_1)+D_k}{C_k} \right\}^{1/2} \quad si\ (y_k^l)^2 \leq - \frac{(\partial f/\partial Y_k|_1)+D_k}{C_k} \leq (y_k^u)^2$$

$$= y_k^u \quad si\ - \frac{(\partial f/\partial Y_k|_1)+D_k}{C_k} \geq (y_k^u)^2$$

$$= y_k^l \quad si\ - \frac{(\partial f/\partial Y_k|_1)+D_k}{C_k} \leq (y_k^l)^2$$

B) La recherche du minimum de $K_{ij}(x_{ij},u)$ sur le domaine $[x_{ij}^{l},x_{ij}^{u}]$ se trouve en ANNEXE A 5.3 et permet d'exprimer x_{ij} en fonction de u :

$$x_{ij}(u) = \left\{-\frac{V_{ij}}{W_{ij}}\right\}^{1/2} \quad \text{si } (x_{ij}^{l})^2 \leq -\frac{V_{ij}}{W_{ij}} \leq (x_{ij}^{u})^2$$

$$= x_{ij}^{u} \quad \text{si } -\frac{V_{ij}}{W_{ij}} \geq (x_{ij}^{u})^2$$

$$= x_{ij}^{l} \quad \text{si } -\frac{V_{ij}}{W_{ij}} \leq (x_{ij}^{l})^2$$

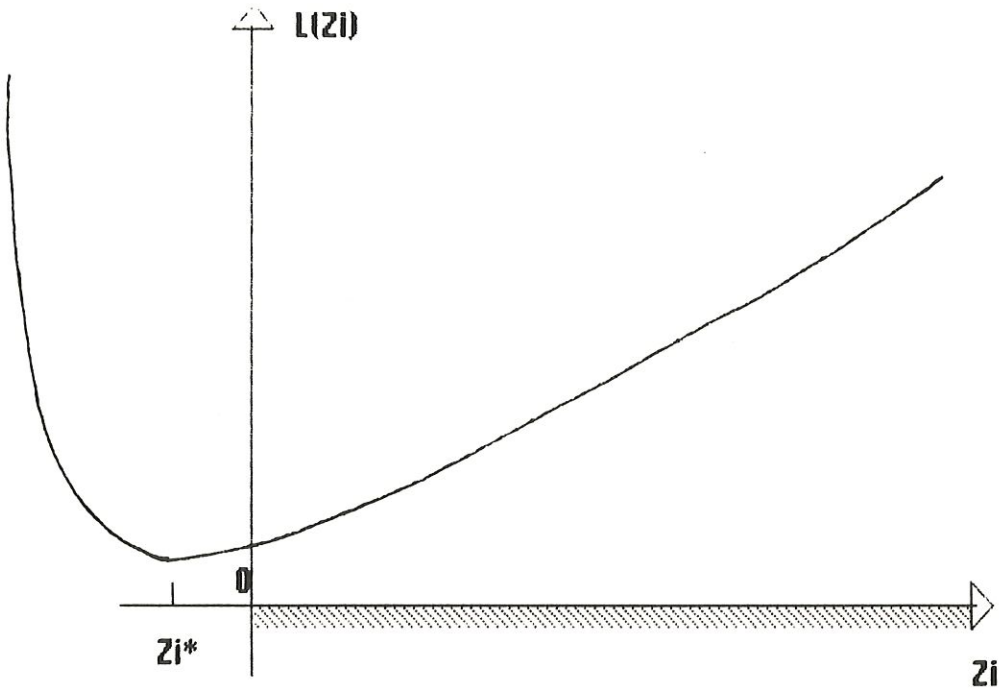
C) La recherche de $\underset{z_i \geq 0}{\text{Min}} \{ d_i z_i + d_i z_i^2 - u_i z_i \} = \underset{z_i \geq 0}{\text{Min}}\ L(z_i)$ donne comme solution :

$$\frac{\partial L(z_i)}{\partial z_i} = d_i + 2d_i z_i - u_i$$

$$\frac{\partial L(z_i)}{\partial z_i} = 0 \Leftrightarrow z_i = \frac{u_i - d_i}{2d_i}$$

$$\frac{\partial^2 L(z_i)}{\partial z_i^2} = 2d_i > 0 \quad \text{donc } L(z_i) \text{ est une fonction convexe}$$

donc si $z_i \leq 0$ nous avons la situation suivante :



Le minimum de $L(z_i)$ sur $[0,\infty[$ est donc 0.

En résumé :

$$z_i = \frac{u_i}{2d_i} - 0.5 \qquad \text{si } \frac{u_i}{2d_i} \geq 0.5$$

$$z_i = 0 \qquad \text{si } \frac{u_i}{2d_i} < 0.5$$

D) La recherche de $\underset{z_{ij} \geq 0}{\text{Min}} \{ d_{ij} z_{ij} + d_{ij} z_{ij}^2 - u_{ij} z_{ij} \}$

Par analogie avec C) :

$$z_{ij} = \frac{u_{ij}}{2d_{ij}} - 0.5 \qquad \text{si } \frac{u_{ij}}{2d_{ij}} \geq 0.5$$

$$z_{ij} = 0 \qquad \text{si } \frac{u_{ij}}{2d_{ij}} < 0.5$$

5.1.5 Critère d'arrêt de l'algorithme

L'algorithme s'arrête quand :

$(Y,X_1,\ldots,X_{ncg})$ et U (vecteur des multiplicateurs de Lagrange) vérifient les conditions de Kuhn et Tucker
et
$(Y,X_1,\ldots,X_{ncg})$ est admissible .

Les conditions de Kuhn et Tucker s'écrivent :

$$\nabla f(Y) + \sum_{i=1..nch} u_i \nabla h_i(Y) + \sum_{i=1..ncg} \sum_{j=1..ncgi(i)} u_{ij} \nabla g_{ij}(Y,X_i) + \sum_{i=1..ncy} e_i (v_i - v_i') + \sum_{i=1..ncg} \sum_{j=1..ncxi(i)} e_{ij} (w_{ij} - w_{ij}') = 0 \qquad (1)$$

où v_i (w_{ij}) est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte $y_i \le y_i^u$ ($x_{ij} \le x_{ij}^u$)
v'_i (w'_{ij}) est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte $y_i^l \le y_i$ ($x_{ij}^l \le x_{ij}$)

où $e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \\ 0 \end{bmatrix}$ $\leftarrow i^{ème}$ ligne

$e_{ij} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ - \\ 0 \\ 0 \\ \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \\ 0 \end{bmatrix}$ ncy lignes

$\leftarrow (ncy + \sum_{k=1..i-1} ncxi(k) + j)^{ème}$ ligne

.) $u_i\, h_i(Y) = 0 \qquad (i=1..nch)$

$u_{ij}\, g_{ij}(Y,X_i) = 0 \quad (i=1..ncg \quad j=1..ncgi(i))$

(2)

(Conditions de Complémentarité)

.) $u_i \geq 0 \qquad (i=1..nch)$

$u_{ij} \geq 0 \qquad (i=1..ncg \quad j=1..ncgi(i))$

$v_i, v'_i \geq 0 \quad (i=1..ncy)$

$w_{ij}, w'_{ij} \geq 0 \; (i=1..ncg \quad j=1..ncxi(i))$

Si y_i atteint sa borne supérieure (inférieure), la condition (1) qui lui est associée se réécrit :

$$\nabla_i f(Y) + \sum_{k=1..nch} u_k \nabla_i h_k(Y) + \sum_{k=1..ncg} \sum_{j=1..ncgi(k)} u_{kj} \nabla_i g_{kj}(Y,X_k) = -v_i \leq 0 \quad (= v'_i \geq 0)$$

Si x_{ij} atteint sa borne supérieure (inférieure) , la condition (1) qui lui correspond se réécrit :

$$\sum_{k=1..ncg} \sum_{l=1..ncgi(k)} u_{kl} \nabla_{ij} g_{kl}(Y,X_k) = -w_{ij} \leq 0 \quad (w'_{ij} \geq 0)$$

Afin de limiter le coût-calcul de l'ordinateur si la convergence n'est pas rapide, nous avons ajouté une condition d'arrêt :

le nombre d'itérations ne peut dépasser un nombre maximal fixé par l'utilisateur .

5.2 IMPLEMENTATION

5.2.1 Commons du programme

```
c
c   Parametres du common DIM
c   ***************************
c
c      NCZ    : Nombre total de variables primales .
c      NCY    : Nombre de variables Y .
c      MNCX   : Maximum du nombre de composantes de Xi .
c      NCXI   : Nombre de composantes de chaque Xi .
c      NCH    : Nombre de contraintes H .
c      NCG    : Nombre de Xi .
c      NCGI   : Nombre de composantes de chaque Gi .
c      MNCG   : Maximum du nombre de composantes de Gi .
c      MNCGH  : Maximum de MNCG et NCH .
c      MNCXY  : Maximum de NCY et MNCX .
c
          integer ncz,ncy,mncx,ncxi(ncgmax),nch,ncg,ncgi(ncgmax),
          1       mncg,mncgh,mncxy
          common/dim/ncz,ncy,mncx,ncxi,nch,ncg,ncgi,mncg,mncgh,mncxy
c
c   Parametres du common BORN
c   ***************************
c
c      UBORNZ : bornes superieures des variables primales .
c      LBORNZ : bornes inferieures des variables primales .
c
          double precision ubornz(ncuzmax),lbornz(ncuzmax)
          common/born/ubornz,lbornz
c
c   Parametres du common REL
c   ***************************
c
c      D : Constantes de relaxation .
c
          double precision d(ncumax)
          common/rel/d
c
c   Parametres du common VAR
c   ***************************
c
c      VAR : Variables courantes mais avec scaling .
c
          double precision var(ncuzmax)
          common/var/var
c
c   Parametres du common F
c   ***************************
c    "common de la fonction objectif"
c
c      DCFTY  : Constante de linearisation convexe .
c      DFCTY1 : Coefficients de la linearisation convexe .
c      FYK    : Valeur de la fonction .
c
          double precision dfcty,dfcty1(ncymax),fyk
          common/f/dfcty,dfcty1,fyk
```

```
c
c   Parametres du common H
c   **********************
c    "common des contraintes H"
c
c     DHCTY :  Constantes de linearisation convexe .



c     DHCTY1 : Coefficients des linearisations convexes .
c     HYK    : Valeurs des fonctions .
c
          double precision dhcty(nchmax),dhcty1(ncymax,nchmax),
          1                hyk(ncgmax)
          common/h/dhcty,dhcty1,hyk
c
c   Parametres du common G
c   **********************
c    "common des contraintes G"
c
c     DGCTXY :  Constantes de linearisation convexe .
c     DGCTY1 : Coefficients en Y des linearisations convexes .
c     DGCTX1 : Coefficients en X1 des linearisations convexes .
c     GXYK    : valeurs des fonctions .
c
          double precision dgctxy(mncgmax,ncgmax),
          1                dgcty1(ncymax,mncgmax,ncgmax),
          2                dgctx1(mncxmax,mncgmax,ncgmax),
          3                gxyk(mncgmax,ncgmax)
          common/g/dgctxy,dgcty1,dgctx1,gxyk
c
c   Parametres du common SORTIE
c   ***************************
c
c     IOUT : Niveau d'impression .
c     US   : Unite de sortie .
c     ITER : nombre d'iterations primales .
c     FCT  : nombre d'iterations duales .
c
          integer iout,us,iter,fct
          common/sortie/iout,us,iter,fct
```

5.2.2 User's guide

1) Nous demandons a l'utilisateur un fichier contenant une
---

version compilee de la routine FGH (zk,gradf,gradh,gradgx,gradgy) (spécifications cfr ultra) et de la linker avec memoire, routines, naglibrary, utillibrary .

.) Commons à employer dans la routine :
DIM,F,G,H

.) Paramètre d'entrée :

ZK (1..NCZ) : double precision
vecteur contenant le point courant de linéarisation, point auquel sont évaluées les fonctions et leur gradient

.) Paramètres de sortie :

GRADF (1..NCY) : double precision
vecteur dont le $i^{ème}$ élément contient

$$\frac{\partial f}{\partial y_i}\Big|_{z_k}$$

GRADH (1..NCYMAX, 1..NCH) : double precision
matrice dont le $(i,j)^{ème}$ élément contient

$$\frac{\partial h_j}{\partial y_i}\Big|_{z_k}$$

GRADGX (1..MNCXMAX, 1..MNCGMAX, 1..NCG) : double precision
matrice dont le $(i,j,l)^{ème}$ élément contient

$$\frac{\partial g_{lj}}{\partial x_{li}}\Big|_{z_k}$$

GRADGY (1..NCYMAX, 1..MNCGMAX, 1..NCG) : double precision
matrice dont le $(i,j,l)^{ème}$ élément contient

$$\frac{\partial g_{lj}}{\partial y_i}\Big|_{z_k}$$

) Certaines sorties de la routine se feront par l'intermediaire des commons .

FYK : double precision (dans le common F)
la valeur de la fonction objectif en ZK

HYK (1..NCH) : double precision (dans le common H)

vecteur dont le $i^{ème}$ élément contient la valeur de la contrainte h_i en ZK

GXYK (1..MNCGMAX, 1..NCG) : double precision (dans le common G)

matrice dont le $(i,j)^{ème}$ élément contient la valeur de la contrainte g_{ij} en ZK

Remarque Il est interdit de changer la valeur d'autres variables des commons .

2) Possibilités d'entrée/sortie

La lecture des données se fait soit par l'écran soit par fichier .
Dans le premier cas, les explications seront données lors de l'interaction avec l'utilisateur qui ne devra fournir que les renseignements demandés .
Dans le second cas, avant l'utilisation du programme, l'utilisateur devra créer deux fichiers (.DAT) qui devront contenir dans l'ordre :

pour le premier:

1. le nombre de contraintes globales (ou de composantes de h) : nch
2. le nombre de vecteurs de variables locales : ncg
3. pour i de 1 à ncg, le nombre de composantes de g_i
4. le nombre de variables globales : ncy
5. pour i de 1 à ncg, le nombre de composantes de x_i : ncxi(i)
6. pour i de 1 à ncy, la borne inférieure (y_i^l) et la borne supérieure (y_i^u) de y_i
7. pour i de 1 à ncg, pour j de 1 à ncgi(i), la borne inférieure (x_{ij}^l) et la borne supérieure (x_{ij}^u) de x_{ij}
8. le nombre maximal d'itérations primales

pour le second :

1. pour i de 1 a ncy, le point de depart en ses composantes y_i
2. pour i de 1 à ncg, pour j de 1 à ncgi(i), le point de départ en ses composantes x_{ij}
3. pour chaque contrainte, un choix de constantes de relaxation . Il est conseillé de les choisir au moins dix fois plus grandes que les coefficients de la fonction objectif .

Remarque : Il est également possible de rentrer les données par un des deux fichiers et les autres à l'écran .

De toute façon, lors de l'interaction, l'utilisateur devra fournir par le terminal la précision du test de Kuhn et Tucker et la précision duale .

Remarques :

1) Il est fortement conseillé de prendre une précision duale (i.e. une précision pour E04KBF) plus grande que celle pour Kuhn et Tucker .

2) La précision du test de Kuhn-Tucker n'est pas équivalente à la précision des résultats . En effet, une précision demandée de 10^{-3} donnera des réponses exactes à 10^{-8} ou 10^{-9}, parfois .

Pour ce qui est des sorties, là encore, il y a possibilité d'avoir les résultats dans un fichier (.DAT) du choix de l'utilisateur ou de les avoir à l'écran . Dans ce cas, nous sortons néanmoins les données du problème et le résultat final dans un fichier nommé "RESULT.OPT" . Dans tous les cas, nous demandons à l'utilisateur le niveau d'impression souhaité :

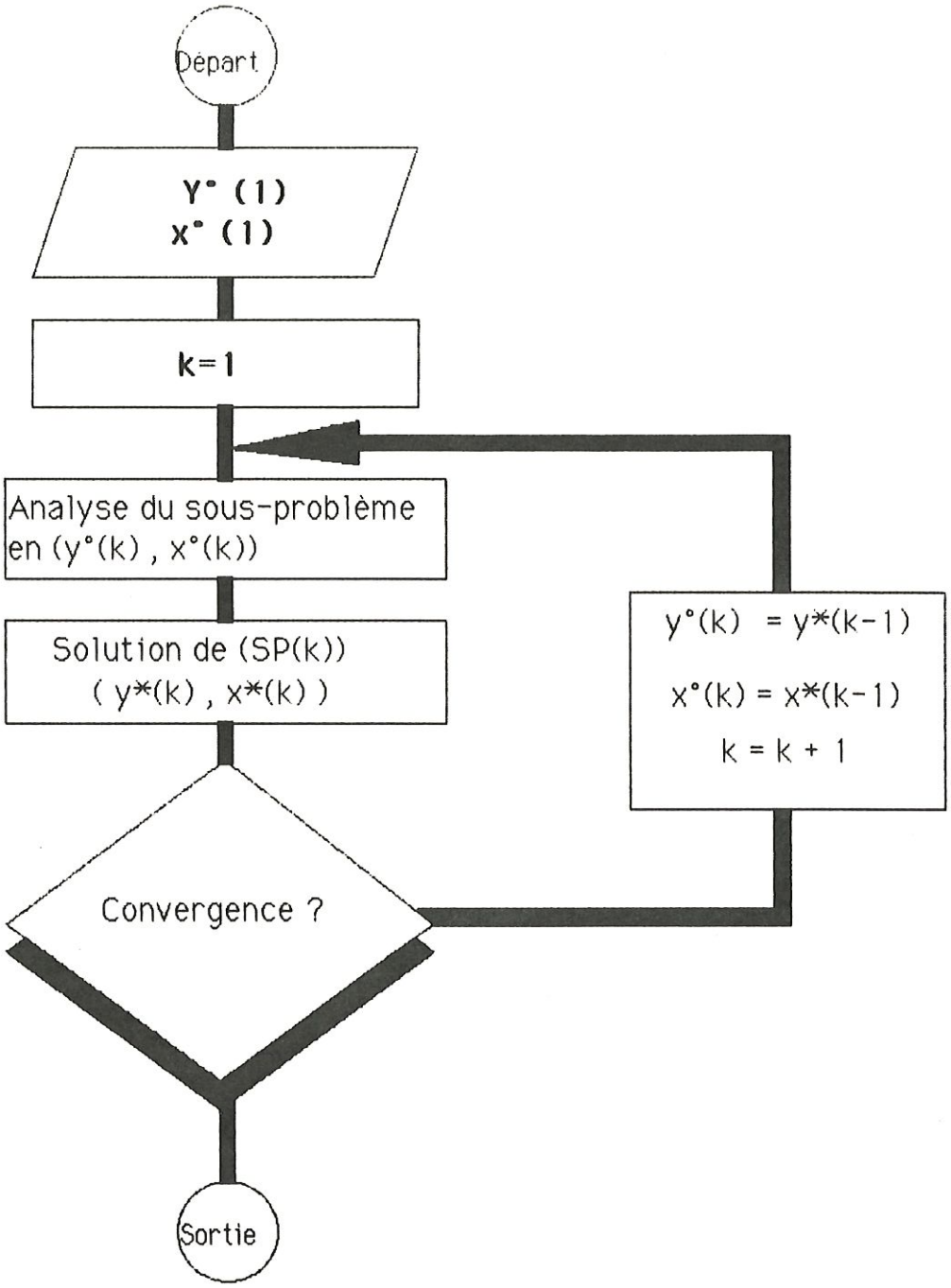
0 pour avoir seulement les données et le résultat final
I>0 pour avoir les résultats toutes les I itérations .

Nous avons également utilisé un niveau d'impression pour les itérations duales :

0 pour n'avoir aucune impression
1 pour avoir les résultats seulement à la dernière itération
2 pour avoir les résultats à toutes les itérations

3) Choix des variables duales

Arbitrairement, nous avons decide qu'a chaque appel de E04KBF nous donnerions à nos variables duales la valeur 1 . Ceci est une pratique courante .



OPTIMISATION A UN NIVEAU AVEC APPROXIMATIONS

```
      PROGRAM RESOLUTION
      ------------------
c     Ce programme resout le probleme d'optimisation expose dans menu
c     par linearisations convexes successives.
c     Chaque sous probleme ainsi cree est resolu par methode duale
c
cRemarque :Nous avons insere des 'include' dans les declarations des routine
c---------- alors que ce n'est pas du fortran 77 standard .
c           Pour rendre ce programme standard il suffit de recopier le common
c           correspondant au nom du include a la place de celui-ci
c
c
c DECLARATIONS
c ============
c
      parameter nczmax=35,nchmax=10,ncsmax=5,mncsmax=5,mncshmax=10,
     1          mncxmax=5,ncymax=10,ncumax=35,ncuzmax=70
c
c  Parametres du programme
c  ***********************
c
c    Les entiers
c    -----------
c     I,J         : Indices d'iteration .
c     NCU         : Nombre total de contraintes .
c     NCUZ        : NCU + le nombre total de variables .
c     UE1,UE2     : Numeros des fichiers d'entree .
c     ITERMAX     : Nombre maximal d'iterations primales .
c     IT          : Temps CPU .
c     ISECONDIFF  : Fonction donnant le temps CPU .
c
      integer i,j,ncu,ncuz,ue1,ue2,itermax,it,isecondiff,iflag
c
c    Les "double precision"
c    ----------------------
c     ZK      : Le point courant .
c     GRADF   : Le gradient de la fonction objectif F .
c     GRADH   : Le gradient des contraintes H .
c     GRADGY  : Le gradient des contraintes G par rapport a Y .
c     GRADGX  : Le gradient des contraintes G par rapport a X .
c     U       : Les multiplicateurs de Lagrange .
c     EPS1    : La precision du test de Kuhn-Tucker .
c     THEMAX  : Fonction donnant une borne superieure de la fonction duale
c     MAX     : Borne superieure de la fonction duale .
c
      double precision zk(nczmax),gradf(ncymax),gradh(ncymax,nchmax),
     1                 gradgy(ncymax,mncsmax,ncsmax),
     2                 gradgx(mncxmax,mncsmax,ncsmax),
     3                 u(ncumax),eps1,themax,max,theta
c
c    Les caracteres
c    --------------
c     NAME1,NAME2 : noms des fichiers de donnees .
c     NAME3       : nom du fichier de sortie .
c
      character*30      name1,name2,name3
c
c    Le booleen
c    ----------
c     ARRET : Fonction d'arret de l'algorithme .
c
      logical           arret
c
c
```

```
c
c  Parametres de E04KBF
c  ********************
c
c  Cette routine est utilisee pour maximiser la fonction duale .
c
c     Les entiers
c     ___________
c      IPRINT : Niveau d'impression .
c      INTYPE : Niveau d'entree des donnees .
c      MAXCAL : Nombre maximal d'appels a FUNCT .
c      IBOUND : Nature des bornes .
c      LH     : Dimension de la matrice hessienne triangulaire inferieure .
c      ISTATE : Position des variables par rapport a leurs bornes .
c      IW     : Tableau de travail .
c      LIW    : Dimension de IW .
c      LW     : Dimension du tableau de tarvail W .
c      IFAIL  : Niveau d'erreur .
c
c        integer iprint,intype,maxcal,ibound,lh,istate(ncumax),iw(10),
c        1       liw,lw,ifail
c
c     Les "double precision"
c     ______________________
c      ETA    : Precision de la recherche lineaire .
c      XTOL   : Precision de la solution .
c      STEPMX : Estimation de la distance du point de depart a la solution .
c      FEST   : Estimation de la valeur de la fonction objectif .
c      BL,BU  : Bornes superieures et inferieures des variables
c      HESL   : Triangulaire inferieure de la factorisation de Cholesky de
c               la matrice hessienne .
c      HESD   : Elements diagonaux de la matrice diagonale de la factorisatio
c               de cholesky de la matrice hessienne .
c      FC     : Valeur de la fonction objectif .
c      GC     : Valeur du gardient de la fonction objectif .
c      W      : Tableau de travail .
c
c        double precision eta,xtol,stepmx,fest,bl(ncumax),bu(ncumax),
c        1                hesl(1000),hesd(ncumax),fc,gc(ncumax),w(1000)
c
c     Le booleen
c     __________
c      LOCSCH : Choix d'une recherche lineaire ou non .
c
c        logical locsch
c
c     Les routines externes
c     _____________________
c      FUNCT  : Calcul de la fonction duale et de ses gradients .
c      MONIT  : Impression .
c      E04LBS : Recherche lineaire .
c
c        external          e04lbs,funct,monit
c
```

```
c COMMONS
c ========
c
c  Parametres du common DIM
c  ************************
c
c     NCZ    : Nombre total de variables primales .
c     NCY    : Nombre de variables Y .
c     MNCX   : Maximum du nombre de composantes de Xi .
c     NCXI   : Nombre de composantes de chaque Xi .
c     NCH    : Nombre de contraintes H .
c     NCG    : Nombre de Xi et de contraintes globales .
c     NCGI   : Nombre de composantes de chaque Gi .
c     MNCG   : Maximum du nombre de composantes de Gi .
c     MNCGH  : Maximum de MNCG et NCH .
c     MNCXY  : Maximum de NCY et MNCX .
c
      integer ncz,ncy,mncx,ncxi(ncsmax),nch,ncs,ncsi(ncsmax),
     1        mncs,mncsh,mncxy
      common/dim/ncz,ncy,mncx,ncxi,nch,ncs,ncsi,mncs,mncsh,mncxy
c
c  Parametres du common BORN
c  *************************
c
c     UBORNZ : bornes superieures des variables primales .
c     LBORNZ : bornes inferieures des variables primales .
c
      double precision ubornz(nczmax),lbornz(nczmax)
      common/born/ubornz,lbornz
c
c  Parametres du common REL
c  ************************
c
c     D : Constantes de relaxation .
c
      double precision d(ncumax)
      common/rel/d
c
c  Parametres du common VAR
c  ************************
c
c     VAR : Variables courantes mais avec scaling .
c
      double precision var(nczmax)
      common/var/var
c
c  Parametres du common F
c  **********************
c   "common de la fonction objectif"
c
c     DCFTY  : Constante de linearisation convexe .
c     DFCTY1 : Coefficients de la linearisation convexe .
c     FYK    : Valeur de la fonction .
c
      double precision dfcty,dfcty1(ncymax),fyk
      common/f/dfcty,dfcty1,fyk
c
c  Parametres du common H
c  **********************
c   "common des contraintes H"
c
c     DHCTY  :  Constantes de linearisation convexe .
c     DHCTY1 : Coefficients des linearisations convexes .
c     HYK    : Valeurs des fonctions .
c
      double precision dhcty(nchmax),dhcty1(ncymax,nchmax),
     1                 hyk(nchmax)
      common/h/dhcty,dhcty1,hyk
```

```
c  Parametres du common G
c  ***********************
c    "common des contraintes G"
c
c     DGCTXY :  Constantes de linearisation convexe .
c     DGCTY1 : Coefficients en Y des linearisations convexes .
c     DGCTX1 : Coefficients en Xi des linearisations convexes .
c     GXYK    : Valeurs des fonctions .
c
          double precision dgctxy(mncsmax,ncsmax),
          1                dgcty1(ncsmax,mncsmax,ncsmax),
          2                dgctx1(mncxmax,mncsmax,ncsmax),
          3                gxyk(mncsmax,ncsmax)
          common/g/dgctxy,dgcty1,dgctx1,gxyk
c
c  Parametres du common SORTIE
c  ***************************
c
c     IOUT : Niveau d'impression .
c     US   : Unite de sortie .
c     ITER : nombre d'iterations primales .
c     FCT  : nombre d'iterations duales .
c
          integer iout,jout,us,iter,fct
          common/sortie/iout,jout,us,iter,fct
c
c
c ROUTINES UTILISEES
c ==================
c
c    INIT     : Initialisation dans la library UTIL .
c    ISECOND  : Initialisation du temps CPU .
c    MENU     : Interaction avec l'utilisateur et choix du mode
c                 d'entree/sortie .
c    INITIAL  : Lecture des donnees .
c    CALNCU   : Calcul de NCU et NCUZ .
c    DEPART   : Lecture du point de depart .
c    PBME     : Impression des donnees du probleme .
c    FGH      : Calcul de la valeur et des gradients de la fonction
c                 objectif et des contraintes .
c    DFOBJ1   : Calcul de la constante et des coefficients de linearisation
c                 convexe de la fonction objectif .
c    DHCON1   : Calcul de la constante et des coefficients de linearisation
c                 convexe des contraintes H .
c    DGCON1   : Calcul de la constante et des coefficients de linearisation
c                 convexe des contraintes G .
c    SCALE    : Scaling sur les bornes des variables .
c    SETPRI   : Calcul des variables primales en fonction des multiplicateurs
c                 de Lagrange .
c    ECHELLE  : Remise a l'echelle de depart des bornes et des variables .
c    SAUVE    : Sauvetage du point courant .
c    FINALE   : Impression des resultats .
c
c
```

```
c
c INSTRUCTIONS
c ============
c
c
c       Initialisation du calcul temps CPU .
c
        CALL INIT
        CALL ISECOND (it)
c
c       Initialisation des variables caracteristiques du probleme .
c
        NAME1 = 'NAME1'
        NAME2 = 'NAME2'
        NAME3 = 'NAME3'
        CALL MENU (name1,name2,name3,ue1,ue2,eps1,xtol)
        IF (US.NE.5) THEN
           OPEN (UNIT=US,FILE=NAME3,STATUS='NEW')
        ELSE
           OPEN (UNIT=45,FILE='RESULT.OPT',STATUS='NEW')
           WRITE (5,4000)
        ENDIF
        CALL INITIAL (ue1,name1,itermax)
        CALL CALNCU (ncu,ncuz)
        FCT = 0
        ITER = 0
c
c       Assignation des parametres constants de "e04kbf" .
c
        IFLAG = 2
        MAXCAL = 100*NCU
        LIW = 10
        LW = 9*NCU
        LH = NCU*(NCU-1)/2
        INTYPE = 0
        IF (JOUT.EQ.2) THEN
           IPRINT = 1
        ELSE
           IPRINT = 0
        ENDIF
        LOCSCH = .TRUE.
        ETA = 0.5
        STEPMX = 100000.
        IBOUND = 2
c
c       Lecture des points de depart primaux et assignation des
c       points de depart duaux .
c
        CALL DEPART (ue2,name2,ncu,zk)
        DO 11 I=1,NCU
           U(I) = 1.
11      CONTINUE
c
c       Impression des donnees .
c
        CALL PBME (itermax,maxcal,eps1,xtol,zk)
c
c       Evaluation des fonctions et de leur gradient .
c
        CALL FGH (zk,gradf,gradh,gradgx,gradgy)
c
10      CONTINUE
```

```
c
c       Est-on a l'optimum ?
c
c
c       Test d'arret : zk est-il point de Kuhn-Tucker ?
c
        IF (ARRET (eps1,gradf,gradh,gradsy,gradsx,u,ncu,itermax,zk))
        1   GOTO 302
c
c
c       On n'est pas encore a l'optimum :
c       Linearisation convexe (normalisee relaxee) en zk .
c
        CALL DFOBJ1 (zk,gradf)
        CALL DHCON1 (zk,gradh)
        CALL DGCON1 (zk,gradsx,gradsy)
        CALL SCALE (zk)
c
c       Fin de la linearisation convexe .
c
c
c
c       Resolution du sous-probleme spk .
c
c       Initialisation des parametres variables de E04KBF .
c
        DO 12 I=1,NCU
           U(I) = 1.
12      CONTINUE

        MAX = THEMAX()
        FEST = -MAX


c       Debut d'impression du resultat intermediaire .
c
        IF (IOUT.NE.0) THEN
           IF (JMOD(iter,iout).EQ.0) THEN
              WRITE (us,5000) ITER
           ENDIF
        ENDIF
c
50      CONTINUE
        IFAIL = 1
c
        CALL E04KBF (ncu,funct,monit,iprint,locsch,intype,e04lbs,
        1            maxcal,eta,xtol,stepmx,fest,ibound,bl,bu,u,hesl,
        2            lh,hesd,istate,fc,gc,iw,liw,w,lw,
        3            ifail)
c
c       Gestion des parametres d'erreur de la routine .
c

        IF (IFAIL.EQ.4) GOTO 50
c
c       Resultats primaux intermediaires .

        CALL SETPRI (u,ncu)
        CALL ECHELLE (zk)
        CALL SAUVE (zk)
        CALL FGH (zk,gradf,gradh,gradsx,gradsy)
        CALL FINALE (zk,ncuz,ncu,u)
c
c       Passage a l'iteration suivante .
c
        ITER = ITER+1
        GOTO 10
```

```
c
c       Impression des resultats finaux .
c
302     IOUT=-1
        WRITE (us,6000)
        WRITE (us,1000) FCT
        WRITE (us,2000) ITER
        IF (US.EQ.5) THEN
           WRITE (45,*) ' '
           WRITE (45,*) 'resultat final'
           WRITE (45,*) '**************'
           WRITE (45,*) ' '
           WRITE (45,1000) FCT
           WRITE (45,2000) ITER
        ENDIF
        CALL FINALE (zk,ncuz,ncu,u)
500     CONTINUE
c
c       Calcul du temps CPU .
c
        IT = ISECONDIFF (it)
        WRITE (us,3000) IT
        IF (US.EQ.5) THEN
           WRITE (45,3000) IT
        ENDIF
c
c FORMATS
c =======
c
1000    FORMAT (1X,'nombre d''evaluations de la fonction duale ',I5)
2000    FORMAT (1X,'nombre d''evaluations de la fonction objectif',/,
        1       1X,'et des contraintes primales  ',I2)
3000    FORMAT (1X,'temps CPU ',I4)
4000    FORMAT  (1X,/,1X,'LE RESUME DES RESULTATS DE L''EXECUTION SE
        1 TROUVE DANS RESULT.OPT .',/)
5000    FORMAT (/,1X,'resultat intermediaire,iteration',I5,/,
        1       1X,'-----------------------------------------------')
6000    FORMAT (/,1X,'resultat final',/,1x,'--------------------')
c
        STOP
        END
EI>
```

```
c     ******************************************************************
c     *    VOICI LES FICHIERS CONTENANT LES COMMONS
c     *    IL FAUT DONC REMPLACER LES "INCLUDE" NON-STANDARDS PAR CES
c     *    FICHIERS CORRESPONDANTS
c     ******************************************************************

      parameter       nesmax=5,nchmax=10,nevmax=10,
     1                nezmax=35,mnexmax=5,mneshmax=10,neumax=35,
     2                neuzmax=70,mnesmax=5
      integer         nez,ney,mnex,nes,nch,mnes,mnesh,
     1                mnexy,nexi(nesmax),nesi(nesmax)
      common/dim/nez,ney,mnex,nexi,nch,nes,nesi,mnes,mnesh,mnexy



      f.for
      double precision dfety,dfety1(nevmax),fyk
      common/f/dfety,dfety1,fyk


      h.for
      double precision dhety(nchmax),dhety1(nevmax,nchmax),
     1                 hyk(nchmax)
      common/h/dhety,dhety1,hyk


      s.for
      double precision dsetxy(mnesmax,nesmax),dsetyl(nevmax,
     1                 mnesmax,nesmax),dsetxl(mnexmax,mnesmax,
     2                 nesmax),sxyk(mnesmax,nesmax)
      common/s/dsetxy,dsetyl,dsetxl,sxyk


      born.for
      double precision ubornz(neuzmax),lbornz(neuzmax)
      common/born/ubornz,lbornz


      rel.for
      double precision d(neumax)
      common/rel/d


      vari.for
      double precision var(neuzmax)
      common/var/var
```

```
routines.for
      SUBROUTINE PBME (itermax,maxcal,eps,xtol,zk)
c     **********************************************
c
c  Cette routine imprime les donnees du probleme dans le(s) fichier(s) de
c sortie .
c
c Commons
c ---------
      include 'dim.for'
      integer iout,jout,us,iter
      common/sortie/iout,jout,us,iter
c
c Specifications
c ----------------
      integer           itermax,maxcal
      double precision eps,xtol,zk(ncz)
c
c Declarations
c ------------
c  I    : Indice d'iteration .
c  NCGT : nombre de contraintes locales .
c  NCXT : nombre de variables locales .
c
      integer i,ncgt,ncxt
c
c Instructions
c ------------
c
c     Calcul des nombres de contraintes locales et de variables locales .
c
      NCGT = 0
      NCXT = 0
      DO 10 I=1,NCG
         NCGT = NCGT + NCGI(I)
         NCXT = NCXT + NCXI(I)
10    CONTINUE
c
c     Impression .
c
      WRITE (US,50)
      WRITE (US,100) NCY,NCXT,NCH,NCGT
      WRITE (US,200) ITERMAX,MAXCAL,EPS
      WRITE (US,300) XTOL
      WRITE (US,400)
      WRITE (US,500) ZK
      IF (US.EQ.5) THEN
         WRITE (45,50)
         WRITE (45,100) NCY,NCXT,NCH,NCGT
         WRITE (45,200) ITERMAX,MAXCAL,EPS
         WRITE (45,300) XTOL
         WRITE (45,400)
         WRITE (45,500) ZK
      ENDIF
```

```
c
c Formats
c ---------
c
50      FORMAT (1X,'DONNEES DU PROBLEME :',/,
        1        1X,'**********************',/,/)
100     FORMAT (1X,'NOMBRE DE VARIABLES GLOBALES :',I2,/,
        2        1X,'NOMBRE DE VARIABLES LOCALES :',I2,/,
        4        1X,'NOMBRE DE CONTRAINTES GLOBALES :',I2,/,
        6        1X,'NOMBRE DE CONTRAINTES LOCALES :',I2)
200     FORMAT (1x,'NOMBRE MAXIMAL D''ITERATIONS PRIMALES:',I2,/,
        1        1X,'NOMBRE MAXIMAL D''ITERATIONS DUALES :',I5,/,
        3        1X,'PRECISION DESIREE POUR LE TEST DE KUHN-
        1TUCKER :',D10.3)
300     FORMAT (1X,'PRECISION DUALE :',D10.3)
400     FORMAT (/,1X,'POINT DE DEPART PRIMAL :',/,
        1        1X,'**************************')
500     FORMAT (1X,D15.5)
c
        RETURN
        END
c
```

```
      SUBROUTINE MENU(name1,name2,name3,ue1,ue2,eps,xtol)
c     ***************************************************
c  Cette routine presente le programme et sort suivant le choix
c de l'utilisateur :
c                -name1 : nom du fichier de donnees contenant les informations
c                         generales du probleme .
c                -name2 : nom du fichier de donnees contenant
c                         les valeurs primales de depart .
c                -name3 : nom du fichier devant contenir les resultats .
c  Elle permet donc le choix du mode d'entree/sortie .
c
c Common
c ------
      integer iout,jout,us,iter
      common/sortie/iout,jout,us,iter
c
c Specifications
c --------------
      character*30      name1,name2,name3
      integer           ue1,ue2
      double precision  eps,xtol
c
c Instructions
c ------------
c
c       Impression du probleme .
c
      WRITE (5,100)
      WRITE (5,200)
      WRITE (5,10)
      READ (5,20) NAME1
c
c       Lecture du nom du fichier contenant les donnees generales .
c
      WRITE (5,299)
      WRITE (5,300)
      WRITE (5,301)
      READ (5,*) UE1
      IF (UE1.NE.5) THEN
         WRITE (5,400)
         READ (5,'(A)') NAME1
      ENDIF
c
c       Lecture du nom de fichier de donnees primales .
c
      WRITE (5,450)
      READ (5,*) UE2
      IF (UE2.NE.5) THEN
         WRITE (5,460)
         READ (5,'(A)') NAME2
      ENDIF
c
c       Lecture du nom du fichier contenant les resultats .
c
      WRITE (5,500)
      READ (5,*) US
      IF (US.NE.5) THEN
         WRITE (5,600)
         READ (5,'(A)') NAME3
      ENDIF
```

```
c
c       Lecture de la precision du test de Kuhn-Tucker, de la precision
c       duale et du niveau d'impression .
c
        WRITE (5,700)
        READ (5,*) EPS
        WRITE (5,800)
        READ (5,*) XTOL
        WRITE (5,900)
        READ (5,*) IOUT
        WRITE(5,950)
        READ(5,*) JOUT
c
c formats
c -------
c
100     FORMAT(1X,'MEMOIRE')
200     FORMAT(1X,'CE PROGRAMME RESOUT LE PROBLEME'/,/,
        1 1X,'            MIN F (y1,...,yp)              '/,/,/,/,
        2 1X,'            SOUS Hk (y1,y2,...,yp) <= 0      '/,/,/,
        3 1X,'                 Gij (y1,...,yp,xi1,...,xim(i)) <= 0 '/,/,/,
        4 1X,'                 0 < Lyh <= yh <= Uyh        '/,/,/,
        5 1X,'                 0 < Lxi1 <= xi1 <= Uxi1     '/,/,/,
        6 1X,'            OU     1 <= i <= s               '/,/,/,
        7 1X,'                   1 <= j <= n(i)            '/,/,/,
        8 1X,'                   1 <= h <= t               '/,/,/,
        9 1X,'                   1 <= l <= m(i)            '/,/)
10      FORMAT(1X,'PRESSEZ UNE TOUCHE POUR CONTINUER')
20      FORMAT(A1)
299     FORMAT('1')
300     FORMAT('1')
301     FORMAT(1X,'LA LECTURE DES DONNEES DU PROBLEME SE FAIT PAR FICHIER ',
        1       1X,'OU PAR ECRAN .',
        2        /,1X,'TAPEZ LE NUMERO DU FICHIER (5 POUR ECRAN) :')
c
450     FORMAT(1X,'LA LECTURE DES VARIABLES PRIMALES SE FAIT PAR FICHIER ',
        1       1X,'OU PAR ECRAN .',
        2        /,1X,'TAPEZ LE NUMERO DU FICHIER (5 POUR ECRAN) :')
c
400     FORMAT(1X,'DONNEZ LE NOM DU FICHIER CONTENANT LES DONNEES :')
c
460     FORMAT(1X,'DONNEZ LE NOM DU FICHIER CONTENANT LES VAR PRIMALES
        1:')
c
500     FORMAT(1X,'L''IMPRESSION DES RESULTATS SE FAIT PAR FICHIER ',
        1       1X,'OU PAR ECRAN .',
        2        /,1X,'TAPEZ LE NUMERO DU FICHIER (5 POUR ECRAN) :')
c
600     FORMAT(1X,'DONNEZ LE NOM DU FICHIER DEVANT CONTENIR LES RESULTA
        1TS :')
700     FORMAT(1X,'DONNEZ LA PRECISION DU TEST DE KHUN-TUCKER :')
800     FORMAT (1X,'DONNEZ LA PRECISION DUALE :')
900     FORMAT (1X,'DONNEZ LE NIVEAU D''IMPRESSION PRIMAL:',/,
        1        1X,'0 ---> RESULTAT FINAL',/,
        2        1X,'1 ---> TOUTES LES ITERATIONS + RESULTAT FINAL',/,
        3        1X,'I ---> TOUTES LES I ITERATIONS + RESULTAT FINAL')
950     FORMAT (1X,'DONNEZ LE NIVEAU D''IMPRESSION DUAL:',/,
        1        1X,'0 ---> AUCUNE IMPRESSION',/,
        2        1X,'1 ---> RESULTAT FINAL A CHAQUE ITERATION PRIMALE',
        3        /,
        3        1X,'2 ---> TOUTES LES  ITERATIONS ')

        RETURN
        END
c
```

```
      SUBROUTINE FINALE(zk,ncuz,ncu,u)
c     ********************************
c
c  Cette routine imprime les resultats .
c
c Commons
c --------
      include       'dim.for'
      include       'f.for'
      include       'vari.for'
      integer        iout,jout,us,iter
      common/sortie/iout,jout,us,iter
c
c Specifications
c ---------------
      integer            ncuz,ncu
      double precision zk(ncz),u(ncu)
c
c Declarations
c ------------
c  I,J    : Indices d'iteration .
c  TOT    : Nombre intermediaire de contraintes .
c  JMOD   : Fonction calculant le reste d'une division entiere .
      integer        i,j,tot,jmod
c
c Instructions
c ------------
c
c     Si IOUT=0 pas d'impression dans US .
c
      IF (IOUT.EQ.0) GOTO 1000
c
c     Verification qu'on est a une iteration imprimable .
c
      IF (JMOD(iter,iout).EQ.0.OR.IOUT.LT.0) THEN
c
c     Impression de la valeur de la fonction objectif .
c
         WRITE (US,*)
         WRITE (US,*) 'LA VALEUR DE LA FONCTION OBJECTIF EST:'
         WRITE (US,100) FYK
c
c     Impression des points-solutions .
c
         DO 200 I=1,NCY
            WRITE (US,300) I , ZK(I)
200      CONTINUE
         TOT=NCY
         DO 500 I=1,NCG
            DO 400 J=1,NCXI(I)
               WRITE (US,600) I,J,ZK(TOT+J)
400         CONTINUE
            TOT=TOT+NCXI(I)
500      CONTINUE
c
c     Impression des variables artificielles .
c
         WRITE (US,*)
         WRITE (US,*) 'LA VALEUR DES VARIABLES ARTIFICIELLES EST:'
         J=1
         DO 10 I=TOT+1,NCUZ
            WRITE (US,700) J,VAR(I)
            J=J+1
10       CONTINUE
```

```
c       Impression des multiplicateurs de Lasranse .
c
           WRITE (US,*)
           WRITE (US,*) 'LES MULTIPLICATEURS DE LAGRANGE VALENT:'
           DO 800 I=1,NCU
              WRITE(US,900)I,U(I)
800        CONTINUE
           WRITE (US,*)
c
c       Impression du resultat final dans result.opt .
c
           IF (US.EQ.5.AND.IOUT.LT.0) THEN
c
c       Impression de la valeur de la fonction objectif .
c
              WRITE (45,*)
              WRITE (45,*) 'LA VALEUR DE LA FONCTION OBJECTIF EST:'
              WRITE (45,100) FYK
c
c       Impression des points-solutions .
c
              DO 201 I=1,NCY
                 WRITE (45,300) I , ZK(I)
201           CONTINUE
              TOT=NCY
              DO 501 I=1,NCG
                 DO 401 J=1,NCXI(I)
                    WRITE (45,600) I,J,ZK(TOT+J)
401              CONTINUE
                 TOT=TOT+NCXI(I)
501           CONTINUE
c
c       Impression des variables artificielles .
c
              WRITE (45,*)
              WRITE (45,*) 'LA VALEUR DES VARIABLES ARTIFICIELLES EST:'
              J=1
              DO 11 I=TOT+1,NCUZ
                 WRITE (45,700) J,VAR(I)
                 J=J+1
11            CONTINUE
c
c       Impression des multiplicateurs de Lasranse .
c
              WRITE (45,*)
              WRITE (45,*) 'LES MULTIPLICATEURS DE LAGRANGE VALENT:'
              DO 801 I=1,NCU
                 WRITE(45,900)I,U(I)
801           CONTINUE
              WRITE (45,*)
           ENDIF
        ENDIF
c
c Formats
c -------
c
100     FORMAT (1X,D20.10)
300     FORMAT (1X,'Y(',I2,')=',D20.10)
600     FORMAT (1X,'X(',I2,',',I2,')=',D20.10)
700     FORMAT (1X,'Z(',I2,')=',D20.10)
900     FORMAT (1X,'U(',I2,')=',D20.10)
c
1000    CONTINUE
        RETURN
        END
c
```

```
      SUBROUTINE FUNCT(iflag,ncu,u,theta,sc,iw,liw,w,lw)
c     ******************************************************
c
c  Cette routine calcule la valeur et les gradients de
c -(moins) la fonction duale . Elle est appelee a l'interieur
c de E04KBF .
c
c Commons
c ---------
      include'dim.for'
      include'vari.for'
      include'f.for'
      include'h.for'
      include's.for'
      include'rel.for'
      include'born.for'
      integer iout,jout,us,iter,fct
      common/sortie/iout,jout,us,iter,fct
c
c Specifications
c ----------------
      integer iflag,ncu,liw,iw(liw),lw
      double precision u(ncu),theta,sc(ncu),w(lw)
c
c Declarations
c ------------
c  I,J,K : Indices d'iterations .
c  TOT   : Nombre intermediaire de contraintes .
c  NCTOT : Nombre intermediaire de variables .
      integer i,j,k,tot,nctot
c
c Instructions
c ------------
c
c     Incrementation du nombre d'appels a FUNCT .
c
      FCT = FCT + 1
c
c     Evaluation des variables primales .
c
      CALL SETFRI(u,ncu)
c
c     Evaluation des gradients de la fonction duale :
c
c     Evaluation de la valeur des contraintes H .
c
      DO 10 I=1,NCH
         GC(I) = DHCTY(I)-VAR(NCZ+I)
         DO 20 J=1,NCY
            IF (DHCTY1(J,I).GT.0) THEN
               GC(I) = GC(I)+DHCTY1(J,I)*VAR(J)
            ELSE
               GC(I) = GC(I)-DHCTY1(J,I)/VAR(J)
            ENDIF
20       CONTINUE
10    CONTINUE
```

```
c
c       Evaluation des valeurs des contraintes G .
c
        NCTOT=NCY
        TOT=NCH
        DO 30 I=1,NCG
           DO 40 J=1,NCGI(I)
              GC(TOT+J)=DGCTXY(J,I)-VAR(NCZ+TOT+J)
              DO 50 K=1,NCY
                 IF (DGCTY1(K,J,I).GT.0) THEN
                    GC(TOT+J)=GC(TOT+J)+DGCTY1(K,J,I)*VAR(K)
                 ELSE
                    GC(TOT+J)=GC(TOT+J)-DGCTY1(K,J,I)/VAR(K)
                 ENDIF
50            CONTINUE
              DO 60 K=1,NCXI(I)
                 IF (DGCTX1(K,J,I).GT.0) THEN
                    GC(TOT+J)=GC(TOT+J)+DGCTX1(K,J,I)*VAR(NCTOT+K)
                 ELSE
                    GC(TOT+J)=GC(TOT+J)-DGCTX1(K,J,I)/VAR(NCTOT+K)
                 ENDIF
60            CONTINUE
40         CONTINUE
           NCTOT=NCTOT+NCXI(I)
           TOT=TOT+NCGI(I)
30      CONTINUE
c
c       Fin des calculs des gradients de la fonction duale .
c
c       Gradients de -la fonction duale .
c
        DO 5 I=1,NCU
           GC(I)=-GC(I)
5       CONTINUE
c
c       Calcul de -la fonction duale
c
        THETA=-DFCTY
        DO 70 J=1,NCY
           IF (DFCTY1(J).GT.0) THEN
              THETA=THETA-DFCTY1(J)*VAR(J)
           ELSE
              THETA=THETA+DFCTY1(J)/VAR(J)
           ENDIF
70      CONTINUE
        TOT=NCZ
        DO 80 I=1,NCU
           THETA=THETA+U(I)*GC(I)-D(I)*VAR(TOT+I)-D(I)*(VAR(TOT+I)**2)
80      CONTINUE
c
        RETURN
        END
c
```

```
      SUBROUTINE MONIT(n,xc,fc,gc,istate,gpjnrm,cond,posdef,niter,
     1                 nf,iw,liw,w,lw)
c     ************************************************************
c
c  Cette routine effectue les impressions a l'interieur de E04KBF .
c
c Commons
c ---------
      include'dim.for'
      include'vari.for'
      integer iout,jout,us,iter,fct
      common/sortie/iout,jout,us,iter,fct
c
c Specifications
c ----------------
      logical posdef
      integer n,istate(n),niter,nf,liw,iw(liw),lw
      double precision xc(n),fc,gc(n),gpjnrm,cond,w(lw)
c
c Instructions
c ------------
c
c     Impression du nombre d'iterations duales .

      IF (IOUT.EQ.0) GOTO 50
      IF (JMOD(iter,iout).EQ.0) THEN
         IF (JOUT.NE.0) THEN
            IF (JOUT.EQ.2) THEN
               WRITE (US,1101) NITER
            ELSE
               WRITE (US,1100) NITER
            ENDIF
            WRITE (US,1200) XC
            WRITE (US,1300) FC
            WRITE (US,1400) GC
         ELSE
            WRITE (US,1000) NITER
         ENDIF
      ENDIF


c
c Format
c --------
c
1000  FORMAT (1X,'NOMBRE D''ITERATIONS DUALES :',I5)
1100  FORMAT (1X,'nombre d''iterations duales ',I5,/
     1        ,'-----------------------------------------------------',/)
1101  FORMAT (1X,'iteration duale',I5,/
     1        ,'-----------------------------------',/)

1200  FORMAT (1X,'variables duales',/,(1x,d20.6))
1300  FORMAT (1X,'fonction duale',/,1x,d20.6)
1400  FORMAT (1X,'gradients duaux',/,(1x,d20.6))

50    CONTINUE
c
      RETURN
      END
c
```

```
      SUBROUTINE INITIAL(ue1,name1,itermax)
c     **********************************
c
c  Cette routine lit les donnees du probleme .
c
c Commons
c ---------
      include  'dim.for'
      include  'born.for'
c Specifications
c ----------------
      character*30      name1
      integer           ue1,itermax
c
c Declarations
c ------------
c  I,K   : Indices d'iteration .
c  NCTOT : nombre intermediaire de variables .
      integer i,k,nctot
c
c Instructions
c ------------
c
c     Ouverture du fichier de donnees .
c
      IF (UE1.NE.5) OPEN(UNIT=UE1,FILE=NAME1,STATUS='OLD')
c
c     Lecture de NCH et NCG .
c
      IF (UE1.EQ.5) THEN
         WRITE (5,100)
      ENDIF
      READ (UE1,*) NCH,NCG
c
c     Lecture de NCGI .
c
      IF (UE1.EQ.5) THEN
         WRITE (5,200)
      ENDIF
      DO 10 I=1,NCG
         READ(UE1,*)NCGI(I)
10    CONTINUE
c
c     Lecture de NCY et NCXI .
c
      IF (UE1.EQ.5) THEN
         WRITE (5,300)
      ENDIF
      READ (UE1,*) NCY
      DO 20 I=1,NCG
         READ (UE1,*) NCXI(I)
20    CONTINUE
c
c     Calcul de NCZ .
c
      NCZ = NCY
      DO 30 I=1,NCG
         NCZ = NCZ+NCXI(I)
30    CONTINUE
c
```

```
c       Lecture de LBORNZ et UBORNZ .
c
        IF (UE1.EQ.5) THEN
           WRITE (5,400)
        ENDIF
        DO 40 I=1,NCY
           READ (UE1,*) LBORNZ(I),UBORNZ(I)
40      CONTINUE
        NCTOT = NCY
        DO 60 I=1,NCG
           DO 50 K=1,NCXI(I)
              READ(UE1,*) LBORNZ(NCTOT+K),UBORNZ(NCTOT+K)
50         CONTINUE
           NCTOT = NCTOT+NCXI(I)
60      CONTINUE
c
c       Lecture de ITERMAX .
c
        IF (UE1.EQ.5) THEN
           WRITE (5,500)
        ENDIF
        READ(UE1,*) ITERMAX
c
c       Calcul de MNCG et MNCX .
c
        MNCG = 0
        MNCX = 0
        DO 70 I=1,NCG
           MNCG = JMAX0(mncg,ncgi(i))
           MNCX = JMAX0(mncx,ncxi(i))
70      CONTINUE
c
c       Calcul de MNCXY .
c
        MNCXY = JMAX0(ncy,mncx)
c
c       Calcul de MNCGH .
c
        MNCGH = JMAX0(nch,mncg)
c
c Formats
c -------
c
100     FORMAT (1X,'DONNEZ LE NOMBRE DE CONTRAINTES GLOBALES .',/,
        1       1X,'DONNEZ LE NOMBRE DE CONTRAINTES LOCALES .')
200     FORMAT (1X,'DONNEZ LE NOMBRE DE COMPOSANTES DE CHAQUE VECTEUR G
        1i, i=1,s .')
300     FORMAT (1X,'DONNEZ LE NOMBRE DE VARIABLES GLOBALES .',/,
        1       1X,'DONNEZ LE NOMBRE DE COMPOSANTES DE CHAQUE VECTEUR X
        1i, i=1,s .')
400     FORMAT (1X,'DONNEZ LES BORNES INFERIEURE ET SUPERIEURE DE CHAQU
        1E VARIABLE',/,1X,'EN COMMENCANT PAR LES VARIABLES GLOBALES PUI
        2S LES LOCALES .')
500     FORMAT (1X,'DONNEZ LE NOMBRE MAXIMAL D''ITERATIONS PRIMALES .')
c
        RETURN
        END
c
```

```
      SUBROUTINE DEPART(ue2,name2,ncu,zk)
c     **********************************
c
c  Cette routine lit les valeurs initiales  des variables primales
c ZK et les constantes associees aux variables artificielles.
c
c Commons
c ---------
      include        'dim.for'
      include        'rel.for'
c
c Specifications
c ----------------
      character*30      name2
      double precision zk(ncz)
      integer           ue2,ncu
c
c Declarations
c --------------
c  I,J   : Indices d'iteration .
c  NCTOT : Nombre intermediaire de variables .
      integer i,j,nctot
c
c Instructions
c --------------
c
c     Ouverture du fichier de lecture .
c
      IF (UE2.NE.5) OPEN(UNIT=UE2,FILE=NAME2,STATUS='OLD')
c
c     Lecture des variables primales de depart .
c
      IF (UE2.EQ.5) THEN
         WRITE (5,100)
      ENDIF
      DO 10 I=1,NCY
         READ (UE2,*) ZK(I)
10    CONTINUE
      NCTOT=NCY
      DO 20 I=1,NCG
         DO 30 J=1,NCXI(I)
            READ(UE2,*) ZK(NCTOT+J)
30       CONTINUE
         NCTOT=NCTOT+NCXI(I)
20    CONTINUE

c     Lecture des "choix de relaxation" D .
c
      IF (UE2.EQ.5) THEN
         WRITE (5,200)
      ENDIF
      DO 40 I=1,NCU
         READ(UE2,*)D(I)
40    CONTINUE
c
c Formats
c ---------
c
100   FORMAT (1X,'DONNEZ LES VALEURS DE DEPART AUX VARIABLES GLOBALES
      1',/,1X,'ET ENSUITE AUX VARIABLES LOCALES .')
200   FORMAT (1X,'DONNEZ LES "CHOIX" DE RELAXATION DES CONTRAINTES .'
      1,/1X,'(GLOBALES PUIS LOCALES)')
c
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE SETPRI(u,ncu)
c     **********************
c
c  Cette routine calcule les valeurs des variables primales
c qui sont solution de l'infimum du lagrangien.
c
c Commons
c ~~~~~~~
      include 'dim.for'
      include 'rel.for'
      include 'vari.for'
      include 'f.for'
      include 'g.for'
      include 'h.for'
      include 'born.for'
c
c Specifications
c ~~~~~~~~~~~~~~
      integer           ncu
      double precision u(ncu)
c
c Declarations
c ~~~~~~~~~~~~
c  I,J,K,L  : Indices d'iterations
c  NCTOT    : Nombre intermediaire de contraintes ou de variables .
c  C,E      : Valeurs intermediaires pour le calcul de Y .
c  V,W      : Valeurs intermediaires pour le calcul des Xi .
c  AUX      : Variable auxiliaire .
c  POS      : Variable auxiliaire .
      integer i,J,k,l,nctot
      double precision   c(neymax),v(mncxmax,ncsmax),
     1                   w(mncxmax,ncsmax),aux,e(neymax)
      logical            pos
c
c Instructions
c ~~~~~~~~~~~~
c
c     Calcul de C et E (calculs intermediaires) .
c
      DO 100 L=1,NCY
            C(L) = 0
            E(L) = 0
         DO 200 I=1,NCH
            IF (DHCTY1(L,I).GT.0) THEN
               C(L) = C(L)+DHCTY1(L,I)*U(I)
            ELSE
               E(L) = E(L)+DHCTY1(L,I)*U(I)
            ENDIF
200      CONTINUE
c
         NCTOT=NCH
         DO 300 I=1,NCG
            DO 400 J=1,NCGI(I)
               IF (DGCTY1(L,J,I).GT.0) THEN
                  C(L) = C(L)+DGCTY1(L,J,I)*U(NCTOT+J)
               ELSE
                  E(L) = E(L)+DGCTY1(L,J,I)*U(NCTOT+J)
               ENDIF
400         CONTINUE
            NCTOT = NCTOT+NCGI(I)
300      CONTINUE
100   CONTINUE
```

```
c
c       Calcul de V et W (calculs intermediaires) .
c
        POS = .FALSE.
        NCTOT = NCH
        DO 500 I=1,NCG
           DO 600 K=1,NCXI(I)
                 W(K,I) = 0.
                 V(K,I) = 0.
                 DO 700 J=1,NCGI(I)
                    IF (DGCTX1(K,J,I).GT.0) THEN
                       W(K,I) = W(K,I)+DGCTX1(K,J,I)*U(NCTOT+J)
                      POS=.TRUE.
                        ELSE
                       V(K,I) = V(K,I)+DGCTX1(K,J,I)*U(NCTOT+J)
                    ENDIF
700              CONTINUE
600        CONTINUE
           NCTOT = NCTOT+NCGI(I)
500     CONTINUE

c       Calcul des Yk .
c
        DO 1100 L=1,NCY
           IF (DFCTY1(L).GT.0) THEN
              IF (DFCTY1(L)+C(L).NE.0) THEN
                 AUX = -E(L)/(DFCTY1(L)+C(L))
              ELSE
                 VAR(L) = UBORNZ(L)
                 GOTO 1101
              ENDIF
           ELSE
              IF (C(L).NE.0) THEN
                 AUX = -(DFCTY1(L)+E(L))/C(L)
              ELSE
                 VAR(L) = UBORNZ(L)
                 GOTO 1101
              ENDIF
           ENDIF
           IF ((LBORNZ(L)**2.LE.AUX).AND.(AUX.LE.UBORNZ(L)**2)) THEN
              VAR(L) = DSQRT(AUX)
           ELSE
              IF (AUX.GE.UBORNZ(L)**2) THEN
                 VAR(L) = UBORNZ(L)
              ELSE
                 VAR(L) = LBORNZ(L)
              ENDIF
           ENDIF
1101    CONTINUE
1100    CONTINUE
```

```
c
c       Calcul des Xik .
c
        NCTOT = NCY
        DO 1200 I=1,NCG
           DO 1300 K=1,NCXI(I)
              IF (W(K,I).NE.0) THEN
                 AUX = -V(K,I)/W(K,I)
                 IF ((LBORNZ(NCTOT+K)**2.LE.AUX).AND.
     1                 (UBORNZ(NCTOT+K)**2.GE.AUX)) THEN
                    VAR(NCTOT+K) = DSQRT(AUX)
                 ELSE
                    IF (AUX.GE.UBORNZ(NCTOT+K)**2) THEN
                       VAR(NCTOT+K) = UBORNZ(NCTOT+K)
                    ELSE
                       VAR(NCTOT+K) = LBORNZ(NCTOT+K)
                    ENDIF
                 ENDIF
              ELSE
                 IF (POS) THEN
                 VAR(NCTOT+K) = LBORNZ(NCTOT+K)
                 ELSE
                 VAR(NCTOT+K) = UBORNZ(NCTOT+K)
                 ENDIF
              ENDIF
1300       CONTINUE
           NCTOT = NCTOT+NCXI(I)
1200    CONTINUE
c
c       Calcul des variables artificielles .
c
        DO 99 I=1,NCU
           VAR(NCZ+I) = U(I)/(2*D(I))-0.5
           IF (VAR(NCZ+I).LT.0) THEN
              VAR(NCZ+I) = 0.
           ENDIF
99      CONTINUE
c
        RETURN
        END
c
```

```
      LOGICAL FUNCTION ARRET(eps,stradf,stradh,stradsy,stradsx,u,neu,
     1                       itermax,zk)
c     ***********************************************************
c
c  Cette fonction est vraie quand le point courant est un point de
c Kuhn-Tucker du probleme initial .
c
c
c Commons
c ---------
      include 'dim.for'
      include 's.for'
      include 'h.for'
      include 'born.for'
      integer  iout,jout,us,iter
      common/ sortie/iout,jout,us,iter
c
c Specifications
c ----------------------
      integer neu,itermax
      double precision     stradsy(neqmax,mncsmax,ncs),zk(ncz),
     1                     stradsx(mncxmax,mncsmax,ncs),u(neu),
     2                     stradh(neqmax,nch),stradf(neq),eps
c
c Declarations
c ------------------
c  I,J,K : Indices d'iteration .
c  NCTOT : Nombre intermediaire de contraintes .
c  NC    : Nombre intermediaire de variables .
c  AUX   : Variables auxiliaires .
      integer             i,j,k,nctot,nc
      double precision aux(nczmax)
c
c Instructions
c ------------------
c
c     Verification de l'admissibilite du point .
c
      ARRET=.TRUE.
      DO 99 I=1,NCH
         ARRET = ARRET.AND.HYK(I).LT.EPS
99    CONTINUE
      DO 98 I=1,NCG
         DO 97 J=1,NCGI(I)
            ARRET = ARRET.AND.GXYK(J,I).LT.EPS
97       CONTINUE
98    CONTINUE
c
```

```
c
c       Verification des conditions de Kuhn-Tucker .
c
        IF (ARRET) THEN
           DO 10 I=1,NCY
              AUX(I) = GRADF(I)
              DO 30 J=1,NCH
                 AUX(I) = AUX(I)+U(J)*GRADH(I,J)
30            CONTINUE
              NCTOT = NCH
              DO 40 J=1,NCG
                 DO 50 K=1,NCGI(J)
                    AUX(I) = AUX(I)+U(NCTOT+K)*GRADGY(I,K,J)
50               CONTINUE
                 NCTOT = NCTOT+NCGI(J)
40            CONTINUE
10         CONTINUE
           NCTOT = NCH
           NC = NCY
           DO 11 J=1,NCG
              DO 12 I=1,NCXI(J)
                 AUX(NC+I) = 0.
                 DO 13 K=1,NCGI(J)
                    AUX(NC+I) = AUX(NC+I)+U(NCTOT+K)*GRADGX(I,K,J)
13               CONTINUE
12            CONTINUE
              NC = NC+NCXI(J)
              NCTOT = NCTOT+NCGI(J)
11         CONTINUE
           DO 70 I=1,NCZ
              IF (LBORNZ(I).LT.ZK(I).AND.UBORNZ(I).GT.ZK(I)) THEN
                 ARRET = ABS(AUX(I)).LT.EPS
              ELSE
                 IF (LBORNZ(I).EQ.ZK(I)) THEN
                    ARRET = AUX(I).GE.-EPS
                 ELSE
                    ARRET = AUX(I).LE.EPS
                 ENDIF
              ENDIF
              IF (.NOT.ARRET) GOTO 1000
70         CONTINUE
c
c       Verification de la condition de complementarite.
c
           NCTOT = NCH
           DO 80 I=1,NCG
              DO 90 J=1,NCGI(I)
                 AUX(1) = U(NCTOT+J)*GXYK(J,I)
                 ARRET = ABS(AUX(1)).LT.EPS
                 IF (.NOT.ARRET) GOTO 1000
90            CONTINUE
              NCTOT = NCTOT+NCGI(I)
80         CONTINUE
           DO 100 J=1,NCH
              AUX(1) = U(J)*HYK(J)
              ARRET = ABS(AUX(1)).LT.EPS
              IF (.NOT.ARRET) GOTO 1000
100        CONTINUE
1000       CONTINUE
        ENDIF
c
c       A-t-on depasse le nombre maximal d'iterations ?
c
        ARRET = ARRET.or.ITER.GT.ITERMAX
c
        RETURN
        END
```

```
      SUBROUTINE CALNCU(ncu,ncuz)
c     **************************
c
c  Cette routine calcule le nombre total NCU de multiplicateurs de
c Lagranse i.e. le nombre de contraintes du probleme primal .
c NCUZ vaudra le nombre de contraintes NCU + le nombre de variables NCZ .
c
c Common
c ------
      include 'dim.for'
c
c Specifications
c --------------
      integer ncu,ncuz
c
c Declarations
c ------------
c  I : indice d'iteration
      integer i
c
c Instructions
c ------------
c
      NCU = NCH
      DO 10 I=1,NCG
         NCU = NCU+NCGI(I)
10    CONTINUE
      NCUZ = NCU+NCZ
c
      RETURN
      END
c



      SUBROUTINE SCALE (zk)
c     *********************
c
c  Cette routine normalise les bornes du probleme et donc
c change les tableaux UBORNZ(NCZ),LBORNZ(NCZ).
c
c Commons
c -------
      include 'dim.for'
      include 'born.for'
c
c Specification
c -------------
      double precision zk(ncz)
c
c Declaration
c -----------
c  I : Indice d'iteration .
      integer i
c
c Instructions
c ------------
c
      DO 10 I=1,NCZ
         UBORNZ(I) = UBORNZ(I)/ZK(I)
         LBORNZ(I) = LBORNZ(I)/ZK(I)
10    CONTINUE
c
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE SAUVE (y)
c     **********************
c
c  Cette routine met le vecteur VAR(NCZ) dans le vecteur Y(NCZ).
c
c Commons
c ---------
      include     'dim.for'
      include     'vari.for'
c
c Specification
c ---------------------
      double precision y(ncz)
c
c Declaration
c ---------------------
c  I : Indice d'iteration .
      integer     i
c
c Instructions
c ---------------------
c
      DO 10 I=1,NCZ
         Y(I) = VAR(I)
10    CONTINUE
c
      RETURN
      END
c
```

```
      SUBROUTINE ECHELLE(zk)
c     **********************
c
c  Cette routine remet a l'echelle les resultats intermediaires VAR(NCZ)
c ainsi que les bornes inferieures et superieures .
c
c Commons
c ---------
      include 'dim.for'
      include 'vari.for'
      include 'born.for'
c
c Specification
c ---------------------
      double precision zk(ncz)
c
c Declaration
c ---------------------
c  I : Indice d'iteration .
      integer i
c
c Instructions
c ---------------------
c
      DO 10 I=1,NCZ
         VAR(I) = VAR(I)*ZK(I)
         UBORNZ(I) = UBORNZ(I)*ZK(I)
         LBORNZ(I) = LBORNZ(I)*ZK(I)
10    CONTINUE
c
      RETURN
      END
c
```

```
      DOUBLE PRECISION FUNCTION THEMAX
c     **************************
c  Cette fonction sort la valeur maximale de la fonction duale .
c On la calcule a partir de la fonction objectif (DFCTY1,DFCTY,FYK)
c et des bornes des variables primales (LBORNZ et UBORNZ).
c
c  Commons
c  ---------
      include 'dim.for'
      include 'f.for'
      include 'rel.for'
      include 'born.for'
c
c Declarations
c ------------------
c  I : Indice d'iteration .
      integer i
c
c Instructions
c ------------------
c
      THEMAX = FYK
      DO 100 I=1,NCY
         IF (DFCTY1(I).GT.0) THEN
            THEMAX = THEMAX+(DFCTY1(I)*UBORNZ(I))
         ELSE
            THEMAX = THEMAX-(DFCTY1(I)*(1/LBORNZ(I)))
         ENDIF
100   CONTINUE
c
      RETURN
      END
^


      SUBROUTINE DFOBJ1 (zk,gradf)
c     ****************************
c
c  Cette routine calcule la constante et les facteurs de
c linearisation convexe de la fonction objectif .
c
c Commons
c ---------
      include'dim.for'
      include'f.for'
c
c Specifications
c ------------------
      double precision zk(ncz),gradf(ncy)
c
c Declaration
c ------------------
c  I : Indice d'iteration .
      integer          i
c
c Instructions
c ------------------
      DFCTY = FYK
      DO 10 I=1,NCY
         DFCTY1(I) = GRADF(I)*ZK(I)
         DFCTY = DFCTY-DABS(DFCTY1(I))
10    CONTINUE
c
      RETURN
      END
c
```

```
      SUBROUTINE DGCON1 (zk,sradsx,sradsy)
c     ************************************
c
c  Cette routine calcule la constante et les facteurs de
c linearisation convexe des contraintes Gij.
c
c Commons
c ---------
      include 'dim.for'
      include 's.for'
c
c Specifications
c ----------------------
      double precision zk(ncz),sradsx(mncxmax,mncsmax,ncs),
     1                 sradsy(ncsmax,mncsmax,ncs)
c Declarations
c ----------------------
c  I,J,K : Indices d'iteration .
c  NC    : Nombre intermediaire de variables .
      integer          i,j,k,nc
c
c Instructions
c ----------------------
c
      NC = NCY
      DO 10 I=1,NCG
         DO 20 J=1,NCGI(I)
            DGCTXY(J,I) = GXYK(J,I)
            DO 30 K=1,NCY
               DGCTY1(K,J,I) = GRADGY(K,J,I)*ZK(K)
               DGCTXY(J,I) = DGCTXY(J,I)-DABS(DGCTY1(K,J,I))
30          CONTINUE
            DO 40 K=1,NCXI(I)
               DGCTX1(K,J,I) = GRADGX(K,J,I)*ZK(NC+K)
               DGCTXY(J,I) = DGCTXY(J,I)-DABS(DGCTX1(K,J,I))
40          CONTINUE
20       CONTINUE
         NC = NC+NCXI(I)
10    CONTINUE
c
      RETURN
      END
E]>
```

```
      SUBROUTINE DHCON1 (zk,gradh)
c     **************************
c
c  Cette routine calcule la constante et les facteurs de
c linearisation convexe des contraintes hi .
c
c Commons
c ---------
      include 'dim.for'
      include 'h.for'
c
c Specifications
c ----------------------
      double precision zk(ncz),gradh(ncymax,nch)
c
c Declarations
c ----------------------
c  I,J : Indices d'iteration .
      integer           i,j
c
c Instructions
c ----------------------
      DO 10 I=1,NCH
         DHCTY(I) = HYK(I)
         DO 20 J=1,NCY
            DHCTY1(J,I) = GRADH(J,I)*ZK(J)
            DHCTY(I) = DHCTY(I)-DABS(DHCTY1(J,I))
20       CONTINUE
10    CONTINUE
c
      RETURN
      END
^
```

RESULTATS NUMERIQUES

La plupart de nos exemples sont tirés ou du moins inspirés de " *Test Examples for nonlinear programming codes* " (W. HOCK et K. Schittkowski) - Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1981 .
Dans l'exemple 34 , nous avons remarqué que lors du calcul de la variable primale x en fonction des variables duales, nous pouvions obtenir une division 0/0 . Dans ce problème nous avons fixé x à sa borne inférieure ce qui nous a amenés à la solution .Par contre,cette stratégie appliquée au dernier exemple entraîne une non-convergence de la méthode alors que fixer x à sa borne supérieure mène à la solution .

```
          res1.dat
ENONCE DU PROBLEME :
********************
MINIMISER Y1 + 4 Y2
SOUS      Y1 + Y2 + X1 -6  <= 0
          Y1 - Y2          <= 0
          -3 Y1 + 2 Y2 + 1 <=0
          .5 <= Y1 <= 4
          .5 <= Y2 <= 4
          .5 <= X1 <= 2

DONNEES DU PROBLEME :
*********************
NOMBRE DE VARIABLES GLOBALES : 2
NOMBRE DE VARIABLES LOCALES : 1
NOMBRE DE CONTRAINTES GLOBALES : 2
NOMBRE DE CONTRAINTES LOCALES : 1
NOMBRE MAXIMAL D'ITERATIONS PRIMALES:98
NOMBRE MAXIMAL D'ITERATIONS DUALES :  300
PRECISION DESIREE POUR LE TEST DE KUHN-TUCKER : 0.100D-03
PRECISION DUALE : 0.100D-07

POINT DE DEPART PRIMAL :
************************
    0.20000D+01
    0.20000D+01
    0.20000D+01

resultat final
______________
nombre d'evaluations de la fonction duale    226
nombre d'evaluations de la fonction objectif
et des contraintes primales    8

LA VALEUR DE LA FONCTION OBJECTIF EST:
    0.5000000000D+01
Y( 1)=     0.1000000000D+01
Y( 2)=     0.9999999999D+00
X( 1, 1)=     0.5000000000D+00

LA VALEUR DES VARIABLES ARTIFICIELLES EST:
Z( 1)=     0.0000000000D+00
Z( 2)=     0.0000000000D+00
Z( 3)=     0.0000000000D+00

LES MULTIPLICATEURS DE LAGRANGE VALENT:
U( 1)=     0.1399990196D+02
U( 2)=     0.4999961397D+01
U( 3)=     0.0000000000D+00

temps CPU    56
EJ>
```

res2.dat

```
ENONCE DU PROBLEME :
********************
MINIMISER -Y1
SOUS      -Y1-X1+7 <= 0
          X1 - 10  <= 0
          .5 <= Y1 <= 10
          .001 <= X1 <= 4

DONNEES DU PROBLEME :
*********************

NOMBRE DE VARIABLES GLOBALES : 1
NOMBRE DE VARIABLES LOCALES : 1
NOMBRE DE CONTRAINTES GLOBALES : 1
NOMBRE DE CONTRAINTES LOCALES : 1
NOMBRE MAXIMAL D'ITERATIONS PRIMALES:20
NOMBRE MAXIMAL D'ITERATIONS DUALES :  200
PRECISION DESIREE POUR LE TEST DE KUHN-TUCKER : 0.100D-05
PRECISION DUALE : 0.100D-12

POINT DE DEPART PRIMAL :
************************
    0.20000D+01
    0.20000D+01

resultat final
______________
nombre d'evaluations de la fonction duale     18
nombre d'evaluations de la fonction objectif
et des contraintes primales    2

LA VALEUR DE LA FONCTION OBJECTIF EST:
   -0.10000000000D+02
Y( 1)=     0.10000000000D+02
X( 1, 1)=     0.40000000000D+01

LA VALEUR DES VARIABLES ARTIFICIELLES EST:
Z( 1)=     0.00000000000D+00
Z( 2)=     0.00000000000D+00

LES MULTIPLICATEURS DE LAGRANGE VALENT:
U( 1)=     0.10000000000D+01
U( 2)=     0.00000000000D+00

temps CPU    39
E]>
```

```
test.dat
ENONCE DU PROBLEME : ( inspire du probleme 18  p.41 )
**********
MINIMISER   .01 Y1**2 + Y2**2
SOUS        25 - Y1*Y2          <= 0
            Y1**2 - Y2**2 + X1 <= 0
            2     <= Y1 <= 50
            .5    <= Y2 <= 50
            24.9 <= X1 <= 25

DONNEES DU PROBLEME :
**********


NOMBRE DE VARIABLES GLOBALES : 2
NOMBRE DE VARIABLES LOCALES : 1
NOMBRE DE CONTRAINTES GLOBALES : 1
NOMBRE DE CONTRAINTES LOCALES : 1
NOMBRE MAXIMAL D'ITERATIONS PRIMALES:20
NOMBRE MAXIMAL D'ITERATIONS DUALES :  200
PRECISION DESIREE POUR LE TEST DE KUHN-TUCKER : 0.100D-02
PRECISION DUALE : 0.100D-06

POINT DE DEPART PRIMAL :
**********
    0.20000D+01
    0.20000D+01
    0.25000D+02

resultat final
--------------
nombre d'evaluations de la fonction duale    432
nombre d'evaluations de la fonction objectif
et des contraintes primales  11

LA VALEUR DE LA FONCTION OBJECTIF EST:
    0.50000001870+01
Y( 1)=     0.15811388600+02
Y( 2)=     0.15811388600+01
X( 1, 1)=     0.24900000000+02

LA VALEUR DES VARIABLES ARTIFICIELLES EST:
Z( 1)=     0.00000000000+00
Z( 2)=     0.00000000000+00

LES MULTIPLICATEURS DE LAGRANGE VALENT:
U( 1)=     0.19995512430+00
U( 2)=     0.00000000000+00

temps CPU    52
```

```
          res19.dat
ENONCE DU PROBLEME : ( inspire du probleme 19  p.42 )
**********************
MINIMISER (Y1-10)**3 + (Y2-20)**3
SOUS      ((Y2-5)**2) + ((Y1-6)**2) - 82.81 <= 0
          -((Y1-5)**2) - ((Y2-5)**2) + X1   <= 0
          13    <= Y1 <= 100
          .001  <= Y2 <= 100
          99.9  <= X1 <= 100

DONNEES DU PROBLEME :
**********************


NOMBRE DE VARIABLES GLOBALES : 2
NOMBRE DE VARIABLES LOCALES : 1
NOMBRE DE CONTRAINTES GLOBALES : 1
NOMBRE DE CONTRAINTES LOCALES : 1
NOMBRE MAXIMAL D'ITERATIONS PRIMALES:20
NOMBRE MAXIMAL D'ITERATIONS DUALES :  200
PRECISION DESIREE POUR LE TEST DE KUHN-TUCKER : 0.100D-03
PRECISION DUALE : 0.100D-07

POINT DE DEPART PRIMAL :
**************************
    0.20100D+02
    0.58400D+01
    0.10000D+03

resultat final
--------------
nombre d'evaluations de la fonction duale   662
nombre d'evaluations de la fonction objectif
et des contraintes primales  15

LA VALEUR DE LA FONCTION OBJECTIF EST:
   -0.70704748710+04
Y( 1)=     0.14045000000+02
Y( 2)=     0.74700399720+00
X( 1, 1)=     0.99900000000+02

LA VALEUR DES VARIABLES ARTIFICIELLES EST:
Z( 1)=     0.00000000000+00
Z( 2)=     0.00000000000+00

LES MULTIPLICATEURS DE LAGRANGE VALENT:
U( 1)=     0.12070439670+04
U( 2)=     0.10763086510+04

temps CPU  730
[]>
```

```
[]>      . res22.dat
ENONCE DU PROBLEME : ( inspire du probleme 22  p.45 )
**********************
MINIMISER   ( Y1 - 2 )**2 + ( Y2 - 1 )**2
SOUS        Y1**2 - Y2
            Y1 + Y2 - X1
            .5  <= Y1 <= 4
            .5  <= Y2 <= 4
            1.9 <= X1 <= 2

DONNEES DU PROBLEME :
**********************


NOMBRE DE VARIABLES GLOBALES : 2
NOMBRE DE VARIABLES LOCALES : 1
NOMBRE DE CONTRAINTES GLOBALES : 1
NOMBRE DE CONTRAINTES LOCALES : 1
NOMBRE MAXIMAL D'ITERATIONS PRIMALES:20
NOMBRE MAXIMAL D'ITERATIONS DUALES :  200
PRECISION DESIREE POUR LE TEST DE KUHN-TUCKER : 0.100D-03
PRECISION DUALE : 0.100D-07

POINT DE DEPART PRIMAL :
************************
    0.20000D+01
    0.20000D+01
    0.20000D+01

resultat final
--------------
nombre d'evaluations de la fonction duale     73
nombre d'evaluations de la fonction objectif
et des contraintes primales    4

LA VALEUR DE LA FONCTION OBJECTIF EST:
    0.100000000 1D+01
Y( 1)=     0.999999999 6D+00
Y( 2)=     0.999999999 5D+00
X( 1, 1)=     0.200000000 0D+01

LA VALEUR DES VARIABLES ARTIFICIELLES EST:
Z( 1)=     0.000000000 0D+00
Z( 2)=     0.000000000 0D+00

LES MULTIPLICATEURS DE LAGRANGE VALENT:
U( 1)=     0.666666668 1D+00
U( 2)=     0.666666667 0D+00

temps CPU    33
[]>
```

```
ENONCE DU PROBLEME : ( inspire du probleme 34 p.57 )
**********************
MINIMISER -Y1
SOUS      -X11 + EXP(Y1) <= 0
          -X12 + EXP(X11) <= 0
          .001 <= Y1 <= 20
          .001 <= X11 <= 20
          .001 <= X12 <= 10

DONNEES DU PROBLEME :
**********************

NOMBRE DE VARIABLES GLOBALES : 1
NOMBRE DE VARIABLES LOCALES : 2
NOMBRE DE CONTRAINTES GLOBALES : 1
NOMBRE DE CONTRAINTES LOCALES : 2
NOMBRE MAXIMAL D'ITERATIONS PRIMALES:20
NOMBRE MAXIMAL D'ITERATIONS DUALES :  300
PRECISION DESIREE POUR LE TEST DE KUHN-TUCKER : 0.100D-02
PRECISION DUALE : 0.100D-07

POINT DE DEPART PRIMAL :
**************************
    0.10000D+01
    0.10500D+01
    0.29000D+01

resultat final
--------------

nombre d'evaluations de la fonction duale   113
nombre d'evaluations de la fonction objectif
et des contraintes primales   5

LA VALEUR DE LA FONCTION OBJECTIF EST:
   -0.83403244550D+00
Y( 1)=     0.83403244550D+00
X( 1, 1)=     0.23025850950D+01
X( 1, 2)=     0.10000000000D+02

LA VALEUR DES VARIABLES ARTIFICIELLES EST:
Z( 1)=     0.00000000000D+00
Z( 2)=     0.00000000000D+00
Z( 3)=     0.00000000000D+00

LES MULTIPLICATEURS DE LAGRANGE VALENT:
U( 1)=     0.00000000000D+00
U( 2)=     0.43429795390D+00
U( 3)=     0.43429374570D-01

temps CPU    32
E]>
```

```
          res3/.dat
DONNEES DU PROBLEME : ( inspire du probleme 37 p.60 )
**********************


NOMBRE DE VARIABLES GLOBALES : 3
NOMBRE DE VARIABLES LOCALES : 1
NOMBRE DE CONTRAINTES GLOBALES : 1
NOMBRE DE CONTRAINTES LOCALES : 1
NOMBRE MAXIMAL D'ITERATIONS PRIMALES:20
NOMBRE MAXIMAL D'ITERATIONS DUALES :  200
PRECISION DESIREE POUR LE TEST DE KUHN-TUCKER : 0.1000-02
PRECISION DUALE : 0.100D-05

POINT DE DEPART PRIMAL :
************************
     0.10000D+02
     0.10000D+02
     0.10000D+02
     0.20000D+04

resultat final
______________
nombre d'evaluations de la fonction duale   581
nombre d'evaluations de la fonction objectif
et des contraintes primales  18

LA VALEUR DE LA FONCTION OBJECTIF EST:
   -0.3470419982D+04
Y( 1)=     0.2403324856D+02
Y( 2)=     0.1201668781D+02
Y( 3)=     0.1201668781D+02
X( 1, 1)=     0.7210000000D+02

LA VALEUR DES VARIABLES ARTIFICIELLES EST:
Z( 1)=     0.0000000000D+00
Z( 2)=     0.0000000000D+00

LES MULTIPLICATEURS DE LAGRANGE VALENT:
U( 1)=     0.0000000000D+00
U( 2)=     0.1444002785D+03

temps CPU    75
E]>
```

```
readdat
ENONCE DU PROBLEME :
********************
MINIMISER 1/Y1
SOUS       -1/Y1                  <= 0
           -1/Y1 - 1/X1 + 3       <= 0
           .25 <= Y1 <= .5
           .25 <= X1 <= 2

DONNEES DU PROBLEME :
*********************


NOMBRE DE VARIABLES GLOBALES : 1
NOMBRE DE VARIABLES LOCALES : 1
NOMBRE DE CONTRAINTES GLOBALES : 1
NOMBRE DE CONTRAINTES LOCALES : 1
NOMBRE MAXIMAL D'ITERATIONS PRIMALES:20
NOMBRE MAXIMAL D'ITERATIONS DUALES :  200
PRECISION DESIREE POUR LE TEST DE KUHN-TUCKER : 0.100D-03
PRECISION DUALE : 0.100D-07

POINT DE DEPART PRIMAL :
************************
    0.50000D+00
    0.50000D+00

resultat final
______________
nombre d'evaluations de la fonction duale      3
nombre d'evaluations de la fonction objectif
et des contraintes primales    1

LA VALEUR DE LA FONCTION OBJECTIF EST:
    0.20000000000D+01
Y( 1)=     0.50000000000D+00
X( 1, 1)=     0.25000000000D+00

LA VALEUR DES VARIABLES ARTIFICIELLES EST:
Z( 1)=     0.00000000000D+00
Z( 2)=     0.00000000000D+00

LES MULTIPLICATEURS DE LAGRANGE VALENT:
U( 1)=     0.00000000000D+00
U( 2)=     0.00000000000D+00

temps CPU    18
[1]>
```

CHAPITRE 6 :

UNE AUTRE METHODE DE RESOLUTION

OPTIMISATION A 2 NIVEAUX

A) PRINCIPE GENERAL

La méthode proposée dans l'article de J-F Barthélémy **[Ref 6]** comporte deux phases :

La première consiste à générer une suite de sous-problèmes linéarisés convexes $(SP)^{(k)}$ - comme dans le chapitre 5 - .

La seconde phase consiste à résoudre chaque sous-problème $(SP)^{(k)}$ par décomposition . C'est ici que se situe la différence avec les méthodes à un seul niveau .

Ce chapitre est donc consacré au développement de cette seconde phase ; nous le concluerons par l'algorithme proposé par J.F. Barthelemy .

B) RESOLUTION DE (SP)$^{(K)}$

1) DECOMPOSITION

Chaque sous-problème linéarisé convexe est de la forme :

$$(SP)^{(k)} \begin{cases} \text{Min} \quad f^{\sim}(y\,;\,y^{(k)}) \\ \text{sous} \quad h_j{}^{\sim}(y\,;\,y^{(k)}) \leq 0 \qquad (j=1..nch) \\ \qquad g_{ij}{}^{\sim}(y,x\,;\,y^{(k)},x^{(k)}) \leq 0 \\ \qquad\qquad (i=1..ncg, j=1..ncgi(i)) \\ \qquad 0 < y^{l} \leq y \leq y^{u} \\ \qquad 0 < x_i^{l} \leq x_i \leq x_i^{u} \qquad (i=1..ncg) \end{cases}$$

$(SP)^{(k)}$ va être décomposé en sous-problèmes dits "de deux niveaux":

--->ncg sous-problèmes de ***bas niveau***
$((SN1)^{(k)})^{(i)}$ i=1..ncg dont les variables sont
x_i : i-ièmes ***variables locales*** du problème initial .

--->1 sous-problème de ***haut niveau***
$(SN2)^{(k)}$ dont les variables sont
y : ***variables globales*** du problème initial .

2) LA FONCTION DE KREISSELMEIER - STEINHAUSER

La première idée de cette méthode est de remplacer les vecteurs de contraintes locales

$$g_i{}^{\sim}(Y,X_i\,;\,Y^{(k)},X_i^{(k)}) = \begin{bmatrix} g_{i1}{}^{\sim}(Y,X_i\,;\,Y^{(k)},X_i^{(k)}) \\ \\ g_{incgi(i)}{}^{\sim}(Y,X_i\,;\,Y^{(k)},X_i^{(k)}) \end{bmatrix}$$

par une fonction scalaire C_i mesurant la violation de ces contraintes :

$$C_i(Y,X_i) = (1/\rho)\,.\,\ln\{\sum_{j=1..ncgi(i)} \rho\, g_{ij}{}^{\sim}(Y,X_i\,;\,Y^{(k)},X_i^{(k)})\}$$

Cette fonction est dite de Kreisselmeier - Steinhauser **[Ref.7]**.
Le choix du paramètre ρ est discuté en ANNEXE A 6.2 .

Propriétés de la fonction :

1) $C_i(Y,X_i)$ est conservative par rapport aux contraintes $g_{ij}{}^{\sim}$
2) $C_i(Y,X_i)$ préserve la convexité des sous-problèmes

(Démonstrations en ANNEXE A 6.1)

3) LES SOUS-PROBLEMES DE BAS NIVEAU

Pour la décomposition du $k^{ème}$ sous-problème, on a ncg sous-sous-problèmes non contraints en fixant $Y = Y^{(k)(j)}$ où (j) représente l'itération courante (encore appelée cycle) de la résolution du problème $(SP)^{(k)}$.

Lors du $j^{ème}$ cycle $(SP)^{(k)}$ devient :

$$\text{Min} \quad F^{\sim}(Y^{(k)(j)}\,;\,Y^{(k)})$$

$$\begin{aligned} \text{Sous} \quad & h^{\sim}(Y^{(k)(j)}\,;\,Y^{(k)}) \le 0 \\ & g_i{}^{\sim}(Y^{(k)(j)},X_i\,;\,Y^{(k)},X_i^{(k)}) \le 0 \qquad (i=1..ncg) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & Y^l \le Y^{(k)} \le Y^u \\ & X_i{}^l \le X_i^{(k)} \le X_i{}^u \qquad (i=1..ncg) \end{aligned}$$

Ce problème se résume aux systèmes d'inéquations suivants :

(1)

$$\begin{cases} g_i^{\sim}(Y^{(k)(j)}, X_i ; Y^{(k)}, X_i^{(k)}) \leq 0 \\ X_i^l \leq X_i^{(k)} \leq X_i^u \end{cases}$$

$(i=1..ncg)$

remplacés par :

$\{(SN1)^{(k)}\}^{(i)}$

$$\begin{cases} \text{Min} \quad C_i(Y^{(k)(j)}, X_i) \\ \text{Sous} \quad X_i^l \leq X_i^{(k)} \leq X_i^u \end{cases}$$

$(i=1..ncg)$

où $C_i(Y^{(k)(j)}, X_i)$ est la fonction de Kreisselmeier-Steinhauser.

La solution du problème d'optimisation $\{(SN1)^{(k)}\}^{(i)}$ est une ε-solution du système (1) (cfr démonstration en ANNEXE A 6.4).

4) LE SOUS-PROBLEME DE HAUT NIVEAU

Soient $X_i^{*(k)(j)}$ les solutions des ncg sous-problèmes de bas niveau.

En fixant, dans $(SP)^{(k)}$, les variables locales à ces valeurs (et en gardant Y comme variables), $(SP)^{(k)}$ devient :

(2)

$$\begin{cases} \text{Min} \quad F^{\sim}(Y ; Y^{(k)}) \\ \text{Sous} \quad h^{\sim}(Y ; Y^{(k)}) \leq 0 \\ \qquad g_i^{\sim}(Y, X_i^{*(k)(j)} ; Y^{(k)}, X_i^{(k)}) \leq 0 \quad (i=1..ncg) \\ \qquad Y^l \leq Y \leq Y^u \\ \qquad X_i^l \leq X_i^{*(k)(j)} \leq X_i^u \quad (i=1..ncg) \end{cases}$$

Ce sous-problème est remplace par :

$((SN2)^{(k)})$

$$\begin{cases} \text{Min} \quad F^{\sim}(Y ; Y^{(k)}) \\ \text{Sous} \quad h^{\sim}(Y ; Y^{(k)}) \leq 0 \\ \qquad C_i^{\sim}(Y , X_i^{*(k)}(j) ; Y^{(k)}, X_i^{(k)}) \leq 0 \quad (i=1..ncg) \\ \qquad Y^l \leq Y \leq Y^u \\ \qquad (1-\beta) Y^{(k)} \leq Y \leq (1+\beta) Y^{(k)} \end{cases}$$

où ß est un paramètre qui permet de rester au voisinage du point $Y^{(k)(j)}$.

Nous avons démontré dans l'ANNEXE A 6.4 que la solution du problème $(SN2)^{(k)}$ est une solution du problème (2) .

C) ALGORITHME

1) INITIALISATION

1.1) poser k = 0 (compteur d'itérations)
poser j = 0 (compteur de cycles)

1.2) choisir un point de départ
$Y^{(k)}, X_1^{(k)}, \ldots, X_{ncg}^{(k)}$

2) ETAPE PRINCIPALE

1) écrire le sous-problème $(SN2)^{(k)}$ et les sous-problèmes $(SN1)^{(k)(i)}$ pour i=1..ncg
(ce qui nécessite l'évaluation de la fonction objectif et des contraintes ainsi que de leur gradient au point courant)

2.1) poser $Y^{(k)(j)} = Y^{(k)}$

2.2) résolution de $(SN1)^{(k)(i)}$ $i=1..ncg$
les solutions optimales seront notées $X_i^{*(k)(j)}$

2.3) étude de sensibilité
(cfr ANNEXE A 6.3)

2.4) poser $X_i^{(k)} = X_i^{*(k)(j)}$

2.5) résoudre $(SN2)^{(k)}$
la solution optimale sera notée $Y^{*(k)(j)}$

2.6) test de convergence des $(SN1)^{(k)(i)}$ et $(SN2)^{(k)}$ vers la solution du $(SP)^{(k)}$
si convergence : poser $Y^{*(k)} = Y^{*(k)(j)}$
$X_i^{*(k)} = X_i^{*(k)(j)}$ $(i=1..ncg)$
aller en 3.
sinon : aller en 2.7

2.7) poser $Y^{(k)(j+1)} = Y^{*(k)(j)}$
$X_i^{(k)(j+1)} = X_i^{*(k)(j)}$ $(i=1..ncg)$
$j = j+1$
retour en 2.2

3.) test de convergence des $(SP)^{(k)}$ vers une solution du problème initial
si convergence : poser $Y^* = Y^{*(k)}$
$X_i^* = X_i^{*(k)}$ $(i=1..ncg)$
STOP
sinon : aller en 4.

4.) poser $Y^{(k+1)} = Y^{*(k)}$
$X_i^{(k+1)} = X_i^{*(k)}$ $(i=1..ncg)$
$k = k+1$
$j = j+1$
retour à l'étape principale

D) MODIFICATION DE L'ALGORITHME

Pour réduire le coût des calculs, on ajoute une possibilité de disconnection dans la résolution de chaque sous-problème .

Après le premier cycle dans chaque itération, les sous-problèmes dont les contraintes sont restées loin d'être violées sont ignorées pour la suite de l'itération . Ceci permet d'éviter une optimisation et une analyse de sensibilité qui ne sont pas nécessaires .

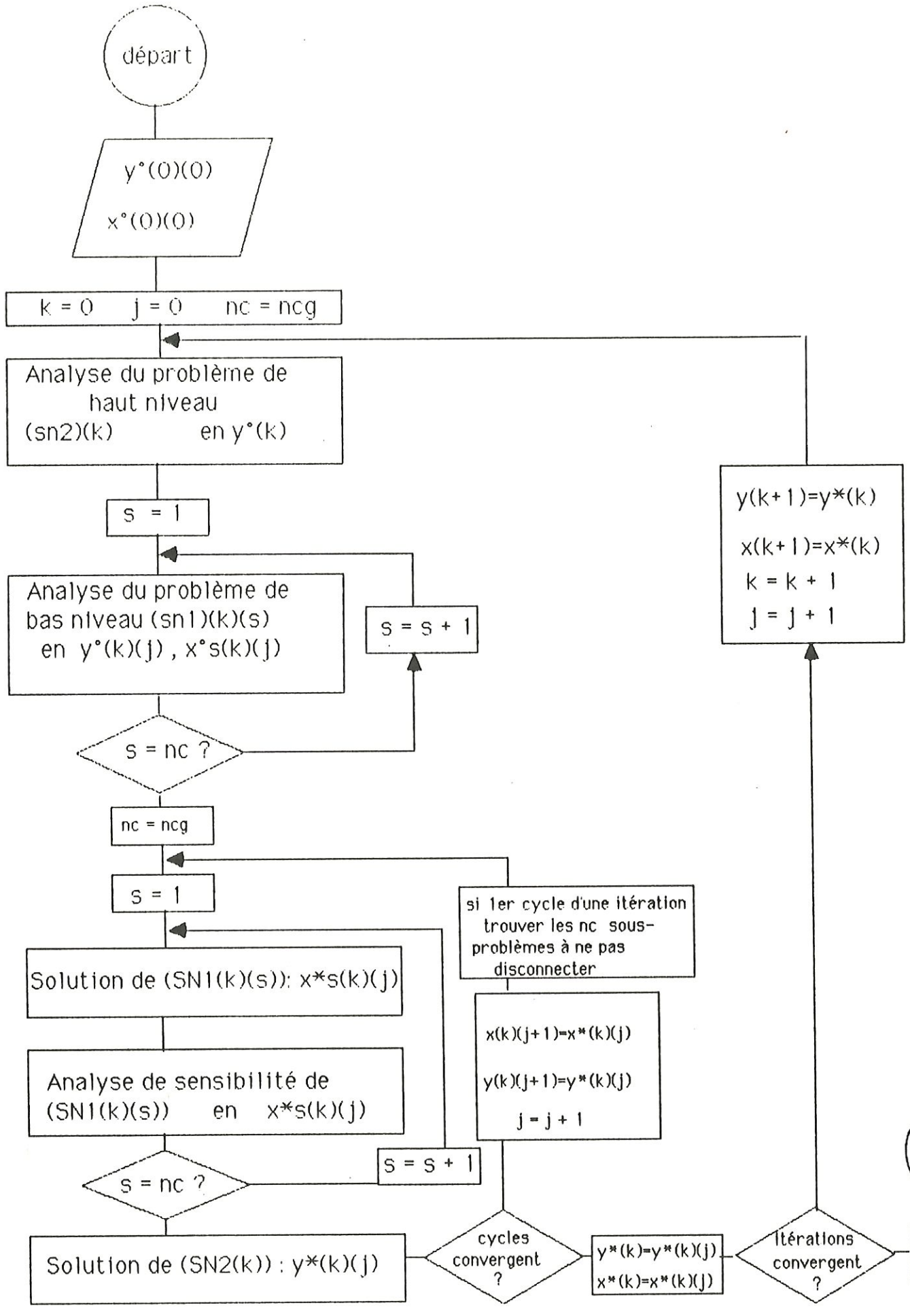
Pour appliquer cette disconnection, il suffirait d'ajouter l'étape suivante au point 2.7 de l'algorithme :

Si on est au premier cycle d'une itération :

déterminer les sous-problèmes $(SN1)^{(k)(i)}$ qui doivent être disconnectés (i.e. les sous-problèmes dont les contraintes sont loin d'être violées)

A noter qu'en plus de cette étape supplémentaire, il faudrait changer les "ncg" de l'étape principale par des "nc" (i.e. le nombre de sous-problèmes de bas niveau restant connectés) . En effet, on ne travaillerait plus que sur les $(SN1)^{(k)(i)}$ connectés . Il est sous-entendu qu'on rangerait les sous-problèmes de telle sorte que les nc premiers soient les "toujours connectés" (i.e. i=1..nc) .

L'organigramme de l'algorithme modifié se trouve en page 6.9 .


départ
y°(0)(0)
x°(0)(0)
k = 0 j = 0 nc = ncg
Analyse du problème de haut niveau (sn2)(k) en y°(k)
s = 1
Analyse du problème de bas niveau (sn1)(k)(s) en y°(k)(j) , x°s(k)(j)
s = s + 1
s = nc ?
nc = ncg
s = 1
Solution de (SN1(k)(s)): x*s(k)(j)
Analyse de sensibilité de (SN1(k)(s)) en x*s(k)(j)
s = s + 1
s = nc ?
Solution de (SN2(k)) : y*(k)(j)
si 1er cycle d'une itération trouver les nc sous-problèmes à ne pas disconnecter
x(k)(j+1)=x*(k)(j)
y(k)(j+1)=y*(k)(j)
j = j + 1
cycles convergent ?
y*(k)=y*(k)(j)
x*(k)=x*(k)(j)
y(k+1)=y*(k)
x(k+1)=x*(k)
k = k + 1
j = j + 1
itérations convergent ?
stop
y*=y*(k)
x*=x*(k)

CHAPITRE 7

CONCLUSION

L'algorithme que nous avons implemente permet un petit nombre d'evaluations de la fonction objectif,des contraintes et de leurs gradients respectifs . Ceci reduit donc le coût-calcul . Les temps CPU pour les exemples que nous avons testés varient entre 18 et 730 centiemes de seconde . Ces avantages nous invitent a conseiller l'emploi de cette méthode, pourtant...

Comme nous l'avons souligné dans les commentaires des résultats numériques du chapitre 5, une étude théorique nous semble nécessaire pour éviter toute indétermination lors de l'évaluation des variables primales . Ceci permettrait d'élaborer un algorithme général (c'est-à-dire indépendent des problèmes à résoudre) . Toutefois nous obtenons déjà de très bons résultats de convergence sur bon nombre de problèmes testés .

ANNEXES DU CHAPITRE 4

ANNEXE 4.1 : La linéarisation mixte

Soit $h : R^n \longrightarrow R$

$x \dashrightarrow h(x)$

Nous allons linéariser h par rapport aux variables x_i pour $i \in J1$ et par rapport aux variables $1/x_i$ pour $i \in J2$

En notant $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$

$\tilde{x} = (x_i)_{i \in J1}$

$\tilde{y} = (y_i)_{i \in J2}$ où $y_i = 1/x_i$

nous pouvons réécrire $h(x) = \tilde{h}(\tilde{x}, \tilde{y})$ et nous linéarisons $\tilde{h}$ au point $(\tilde{x}^\circ, \tilde{y}^\circ)$

$$\tilde{h}(\tilde{x},\tilde{y}) \equiv \tilde{h}(\tilde{x}^\circ,\tilde{y}^\circ) + \left(\left.\frac{\partial \tilde{h}}{\partial x_i}\right|_{i \in J1} \quad \left.\frac{\partial h}{\partial y_i}\right|_{i \in J2} \right)_{(\tilde{x}^\circ,\tilde{y}^\circ)} \begin{matrix} \tilde{x}-\tilde{x}^\circ \\ \tilde{y}-\tilde{y}^\circ \end{matrix}$$

$$\equiv \tilde{h}(\tilde{x}^\circ,\tilde{y}^\circ) + \sum_{J1} \left.\frac{\partial \tilde{h}}{\partial x_i}\right|_{\tilde{x}^\circ} (x_i - x_i^\circ) + \sum_{J2} \left.\frac{\partial \tilde{h}}{\partial y_i}\right|_{\tilde{y}^\circ} (y_i - y_i^\circ)$$

En utilisant la formule de dérivation de fonction composée

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial y_i} = \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial y_i} = \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x_i}(-1/y_i^2)$$

nous obtenons

$$\tilde{h}(\tilde{x},\tilde{y}) = \tilde{h}(\tilde{x}^\circ,\tilde{y}^\circ) + \sum_{J1} \left.\frac{\partial \tilde{h}}{\partial x_i}\right|_{x^\circ} (x_i - x_i^\circ)$$

$$- \sum_{J2} \left.\frac{\partial \tilde{h}}{\partial x_i}\right|_{x^\circ} (y_i - y_i^\circ)(1/y_i^\circ)^2$$

En revenant aux variables initiales

$$h(x) \equiv h^{\sim}(x\,;\,x^{\circ}) = h(x^{\circ}) + \sum_{J1} \frac{\partial h}{\partial x_i}\Big|_{x^{\circ}} (x_i - x_i^{\circ})$$

$$- \sum_{J2} \frac{\partial h}{\partial x_i}\Big|_{x^{\circ}} (1/x_i - 1/x_i^{\circ})\,(x_i^{\circ})^2$$

Par analogie pour $g : R^n \times R^m \longrightarrow R$

$(y\,,\ x) \dashrightarrow g(y,x)$

En notant $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$

$x1^{\sim} = (x_i)_{\,i \in J1}$

$x2^{\sim} = (w_i)_{\,i \in J2}$ où $w_i = 1/x_i$

$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^t$

$y1^{\sim} = (y_i)_{\,i \in J1}$

$y2^{\sim} = (z_i)_{\,i \in J2}$ où $z_i = 1/x_i$

nous pouvons réecrire $g(y,x) = g^{\sim}(y1^{\sim}, y2^{\sim}, x1^{\sim}, x2^{\sim})$, nous linéarisons $g^{\sim}$ au point $(y1^{\sim\circ}, y2^{\sim\circ}, x1^{\sim\circ}, x2^{\sim\circ})$ et en utilisant la formule de dérivation composée pour revenir aux variables initiales

$$g(y,x\,;\,y^{\circ},x^{\circ}) \equiv g^{\sim}(y1^{\sim}, y2^{\sim}, x1^{\sim}, x2^{\sim}) = g(y^{\circ},x^{\circ}) +$$

$$+ \sum_{J1} \frac{\partial g}{\partial y_i}\Big|_{y^{\circ},x^{\circ}} (y_i - y_i^{\circ}) - \sum_{J2} \frac{\partial g}{\partial y_i}\Big|_{y^{\circ},x^{\circ}} (1/y_i - 1/y_i^{\circ})\,(y_i^{\circ})^2$$

$$+ \sum_{K1} \frac{\partial g}{\partial x_i}\Big|_{y^{\circ},x^{\circ}} (x_i - x_i^{\circ}) - \sum_{K2} \frac{\partial g}{\partial x_i}\Big|_{y^{\circ},x^{\circ}} (1/x_i - 1/x_i^{\circ})\,(x_i^{\circ})^2$$

Il s'agit de montrer que le problème linéarisé suivant est convexe .

$$\begin{aligned} &\text{Min} \quad f^{\sim}(y\,;\,y^{\circ}) \\ &\text{sous} \quad h_j{}^{\sim}(y\,;\,y^{\circ}) \le 0 \qquad (j=1..nch) \\ &\qquad g_{ij}{}^{\sim}(y,x\,;\,y^{\circ},x^{\circ}) \le 0 \quad (i=1..ncg,\ j=1..ncgi(i)) \\ &\qquad 0 < y^{l}_{i} \le y_i \le y^{u}_{i} \qquad (i=1..ncy) \\ &\qquad 0 < x^{l}_{ik} \le x_{ik} \le x^{u}_{ik} \quad (i=1..ncg,\ k=1..ncxi(i)) \end{aligned}$$

Pour cela il suffit de montrer que $f^{\sim}(y\,;\,y^{\circ})$, $h_j{}^{\sim}(y\,;\,y^{\circ})$, et $g_{ij}{}^{\sim}(y,x\,;\,y^{\circ},x^{\circ})$ sont des fonctions convexes . Voyons que les matrices hessiennes de ces fonctions sont demi-définies positives .

$$\begin{bmatrix} d1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d2 & 0 \dots & 0 \\ & & & \\ 0 & \dots & & dn \end{bmatrix}$$

où $di = -2 \dfrac{(y_i^{\circ})^2}{(y_i)^3} \dfrac{\partial f}{\partial y_i|y^{\circ}}$ si $\dfrac{\partial f}{\partial y_i|\,y^{\circ}} < 0$

0 sinon

Cette matrice est semi-définie positive car $di \ge 0$ pour chaque indice i=1..ncy . Nous pouvons raisonner de même pour les fonctions h_j .

La matrice hessienne de $g_{ij}{}^{\sim}$ est égale à

$$\begin{bmatrix} p1 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & p2 & 0 \dots & & 0 \\ & & & & \\ 0 & 0 & pn & 0 \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & q1 \quad 0 \dots & 0 \\ 0 & \dots & & q2 & 0 \\ & & & & \\ 0 & \dots & & & qm \end{bmatrix}$$

où $pk = -2 \dfrac{}{(y_k)^3} \dfrac{}{\partial y_k \mid y^\circ, x^\circ}$ si $\dfrac{}{\partial y_k \mid y^\circ, x^\circ} < 0$

0 sinon $(k = 1..ncy)$

et $qk = -2 \dfrac{(x_{ik}^\circ)^2}{(x_{ik})^3} \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x_{ik} \mid y^\circ, x^\circ}$ si $\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x_{ik} \mid y^\circ, x^\circ} < 0$

0 sinon $(k = 1..ncxi(i))$

Cette matrice est donc semi-définie positive car pk et qk sont positifs pour chaque indice k .

cqfd .

ANNEXES DU CHAPITRE 5

ANNEXE 5.1 : Calcul du gradient de la fonction duale

Soit

$$\theta(u) = \min \{f(x) + \Sigma_{i=1..m} u_i\, g_i(x)\}$$

où $f, g_i : R^n \longrightarrow R$

$f,\ g_i \in C^1$

$x = (x_1, x_2 \ldots, x_n)^t$

Nous pouvons encore écrire

$$\theta(u) = f(x^*) + \Sigma_{i=1..m} u_i\, g_i(x^*) \qquad \textbf{(1)}$$

où $x^* = x^*(u)$ réalise le minimum .

Calculons le gradient de $\theta(u)$:

$$\nabla \theta(u) = \left(\frac{\partial \theta}{\partial u_i} \right)_{i=1..m}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial u_k} = \Sigma_{l=1..m} \frac{\partial f}{\partial x^*_l} \frac{\partial x^*_l}{\partial u_k} + \Sigma_{l=1..n} \Sigma_{i=1,m} \frac{\partial g_i}{\partial x^*_l} \frac{\partial x^*_l}{\partial u_k}$$

$$+ g_k$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial u_k} = \Sigma_{l=1..m} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x^*_l} + \Sigma_{i=1,m} \frac{\partial g_i}{\partial x^*_l} \right\} \frac{\partial x^*_l}{\partial u_k} + g_k$$

Si x^*_l atteint une de ses bornes alors

$$\frac{\partial x^*_l}{\partial u_k} = 0 \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial \theta(u)}{\partial u_k} = g_k$$

Si x^*_l est strictement compris entre ses bornes alors

$$\frac{\partial f}{\partial x^*_l}\frac{\partial x^*_l}{\partial u_k} + \sum_{i=1,m} \frac{\partial g_i}{\partial x^*_l} = 0 \text{ par les conditions}$$

d'optimalité du premier ordre car x^* réalise le minimum de **(1)**

$$\text{d'où} \quad \frac{\partial \theta(u)}{\partial u_k} = g_k$$

En conclusion

$$\nabla \theta(u) = g(x^*)$$

cqfd.

ANNEXE 5.2 : Trouver y'_j en fonction de u

Nous allons pour cela minimiser $\mathcal{L}_j(y'_j,u)$ sur $[y'_j{}^l, y'_j{}^u]$

ou $y'_j > 0$

avec

$$\mathcal{L}_j(y'_j,u) = \frac{\partial f}{\partial y'_j} y'_j + C_j y'_j - D_j (1/y'_j) \quad \text{si} \quad \frac{\partial f}{\partial y'_j}\Big|_1 > 0$$

$$= -\frac{\partial f}{\partial y'_j} y'_j + C_j y'_j - D_j (1/y'_j) \quad \text{si} \quad \frac{\partial f}{\partial y'_j}\Big|_1 > 0$$

si $\dfrac{\partial f}{\partial y'_j}\Big|_1 > 0$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_j}{\partial y'_j} = \frac{\partial f}{\partial y'_j} + C_j + \frac{D_j}{(y'_j)^2}$$

si $D_j = 0$ $\quad \rightarrow \dfrac{\partial \mathcal{L}_j}{\partial y'_j} = \dfrac{\partial f}{\partial y'_j} + C_j \geq 0$

-> La fonction $\mathcal{L}_j$ est croissante en la variable y'_j, son minimum est donc atteint en y'_j, la borne inférieure de l'intervalle considéré.

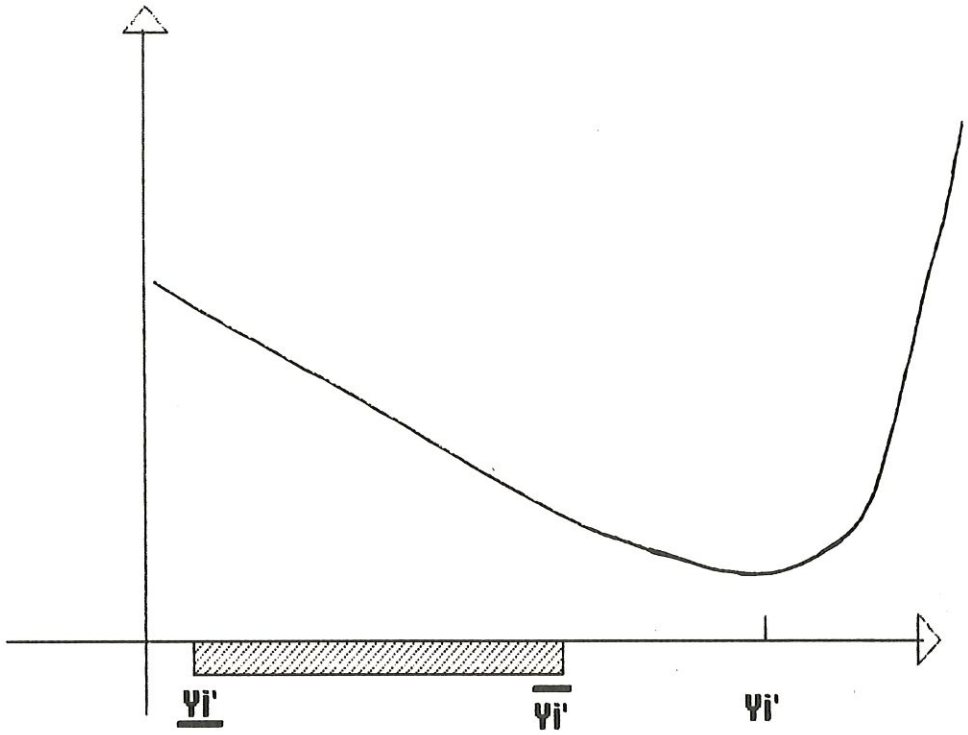
si $D_j \neq 0$ -> Annuler la dérivée de $\mathcal{L}_j$ par rapport à y'_j donne :

$$y'_j{}^2 = -\frac{D_j}{(\partial f/\partial y'_j|1) + C_j}$$

$\mathcal{L}_j$ est une fonction convexe pour $y'_j > 0$ car

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}_j}{\partial y'^2_j} = -2 \frac{D_j}{y'^3_j} > 0$$

Si $y'_j \geq y'^u_j$, nous avons la situation suivante :

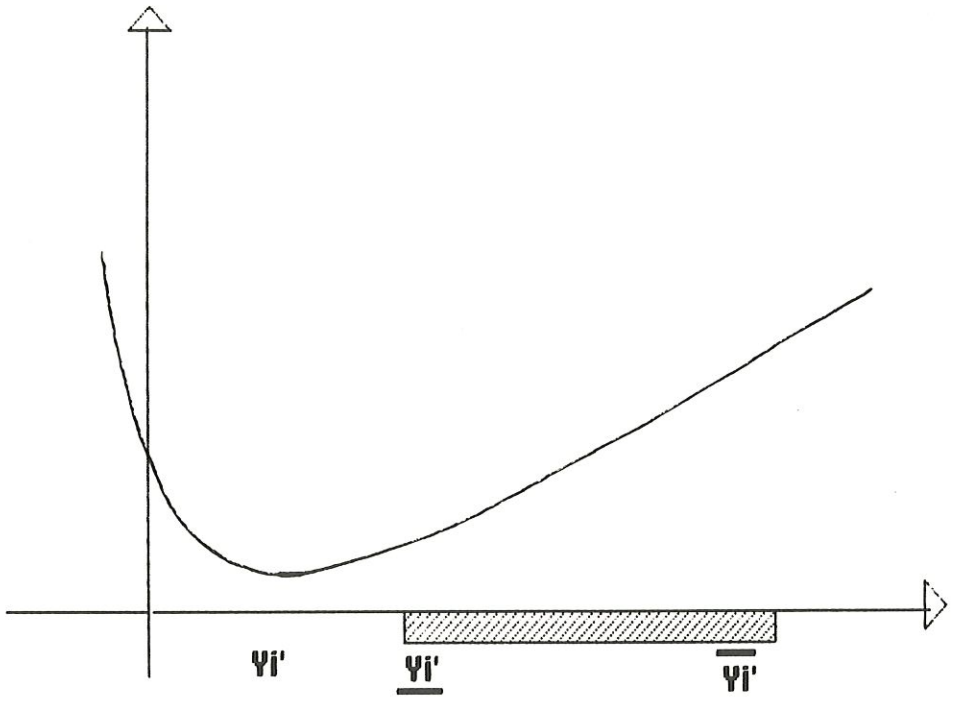


[fig. 1]

Graphe de $\mathcal{L}_j$ ($y'_j \geq y'^u_j$)

Le minimum de $\mathcal{L}_j$ sur $[\, y'^l_j , y'^u_j]$ est donc en y'^u_j.

Si $y'_j \leq y'^{l}_j$, nous avons la situation suivante :



[fig. 2]

Graphe de $\angle_j$ ($y'_j \leq y'^{l}_j$)

Le minimum de $\angle_j$ sur $[\, y'^{l}_j , y'^{u}_j]$ est donc en y'^{u}_j.

si $\dfrac{\partial f}{\partial y'_j | 1} < 0$

$$\frac{\partial \angle_j}{\partial y'_j} = \frac{\partial f}{\partial y'_j} \frac{1}{(y'_j)^2} + C_j + \frac{D_j}{(y'_j)^2}$$

si $C_j = 0$ $\quad \rightarrow \dfrac{\partial \mathcal{L}_j}{\partial y'_j} = \left(\dfrac{\partial f}{\partial y'_j} + D_j \right) \dfrac{1}{(y'_j)^2} < 0$

-> La fonction $\mathcal{L}_j$ est decroissante en la variable y'_j, son minimum est donc atteint en y'^u_j, la borne superieure de l'intervalle considéré.

si $C_j \neq 0$ -> Annuler la dérivée de $\mathcal{L}_j$ par rapport à y'_j donne :

$$y'^2_j = - \frac{(\partial f / \partial y'_j \,|1) + D_j}{C_j}$$

$\mathcal{L}_j$ est une fonction convexe pour $y'_j > 0$ car

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}_j}{\partial y'^2_j} = -2 \frac{(\partial f / \partial y'_j \,|1) + D_j}{y'^3_j} > 0$$

Si $y'_j \geq y'^u_j$ comme dans la figure le minimum de $\mathcal{L}_j$ sur $[y'^l_j, y'^u_j]$ est donc en y'^u_j
Si $y'_j \leq y'^l_j$ comme dans la figure le minimum de $\mathcal{L}_j$ sur $[y'^l_j, y'^u_j]$ est donc en y'^l_j.
Ceci nous fournit bien les résultats annoncés en page 5.16.

Trouver x_{ij}' en fonction de u

Pour cela nous allons minimiser $k_{ij}(x_{ij}', u)$ sur $[x'^{l}_{ij}, x'^{u}_{ij}]$ où x'_{ij} est un réel strictement positif et avec

$$k_{ij}(x_{ij}', u) = W_{ij}\, x'_{ij} - V_{ij}\,(1/x'_{ij})$$

$$\frac{\partial k_{ij}}{\partial x'_{ij}} = W_{ij} + \frac{V_{ij}}{(x'_{ij})^2}$$

Annuler la dérivée de $k_{ij}(x'_{ij}, u)$ par rapport à x'_{ij} donne

$$(x'_{ij})^2 = -\frac{V_{ij}}{W_{ij}}$$

Si $V_{ij} \neq 0$ k_{ij} est une fonction convexe pour $x'_{ij} > 0$ car

$$\frac{\partial^2 k_{ij}}{\partial x'^{2}_{ij}} = -2\,\frac{V_{ij}}{(x'_{ij})^3} > 0$$

Si $x'_{ij} \geq x'^{u}_{ij}$ (par analogie avec la figure 1), le minimum de k_{ij} sur $[x'^{l}_{ij}, x'^{u}_{ij}]$ est donc en x'^{u}_{ij}.
Si $x'_{ij} \leq x'^{l}_{ij}$ (par analogie avec la figure 2), le minimum de k_{ij} sur $[x'^{l}_{ij}, x'^{u}_{ij}]$ est donc en x'^{l}_{ij}.

Si $V_{ij} \neq 0$ k_{ij} est une fonction croissante en x'_{ij} car

$$\frac{\partial k_{ij}}{\partial x'_{ij}} = W_{ij} \geq 0$$

d'où son minimum est atteint en x'_{ij} . Ceci nous fournit les résultats annoncés en page 5.17 .

Annexe 5.3 : Estimation de Fest

Dans les spécifications de E04KBF , Fest doit être une estimation ou une sous-estimation du minimum de la fonction à minimiser . Nous avons donc implémenté une routine THEMAX qui calcule une sur-estimation de la fonction duale...qui sera donc a fortiori une sur-estimation du maximum de cette fonction .

Pour calculer cette estimation nous avons majoré chaque terme de la fonction duale :

chaque variable a été remplacée

par sa borne supérieure au dénominateur (1)

par sa borne inférieure au numérateur ,(2)

les termes constants (négatifs) ont été omis (3) ainsi que les facteurs des multiplicateurs de lagrange (4) .

$$\sum_{i+} \frac{\partial f}{\partial y_i}\Big|_1 \; y_i \;(1) \; - \sum_{i-} \frac{\partial f}{\partial y_i}\Big|_1 \; \frac{1}{y_i} \;(2) \; +$$

$$\sum_{i-} \frac{\partial f}{\partial y_i}\Big|_1 \; - \sum_{i+} \frac{\partial f}{\partial y_i}\Big|_1 \; + \; f(Y^{(k)}) \; +$$

$$+ \sum_{j=1..nch} u_j \Big(\sum_{i+} \frac{\partial h_j}{\partial y_i}\Big|_1 \; y_i \; - \sum_{i-} \frac{\partial h_j}{\partial y_i}\Big|_1 \; \frac{1}{y_i} \; +$$

$$\sum_{i-} \frac{\partial h_j}{\partial y_i}\Big|_1 \; - \sum_{i+} \frac{\partial h_j}{\partial y_i}\Big|_1 \; (3) \; + \; h_j(Y^{(k)}) - z_j \Big)$$

$$+ \sum_{i=1..ncg} \sum_{j=1..ncgi(i)} u_{ij} \; (4) \; \Big(\sum_{k+} \frac{\partial g_{ij}}{\partial y_k}\Big|_1 \; y_k \; -$$

...

$$\sum_{k-} \frac{\partial g_{ij}}{\partial y_k \,||} \frac{1}{y_k} + \sum_{k+} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_{ik} \,||} x_{ik} -$$

$$\sum_{k-} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_{ik} \,||} \frac{1}{x_{ik}} - \sum_{k+} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_{ik} \,||} +$$

$$\sum_{k-} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_{ik} \,||} - \sum_{k+} \frac{\partial g_{ij}}{\partial y_k \,||} + \sum_{k-} \frac{\partial g_{ij}}{\partial y_k \,||} +$$

$$g_{ij}(Y^{(k)}, X_i^{(k)}) - z_{ij} \;)$$

Ceci devient donc

$$\text{fest} = -(\sum_{i+} \frac{\partial f}{\partial y_i \,||}^{(1)} y_i^u - \sum_{i-} \frac{\partial f}{\partial y_i \,||} \frac{1}{y_i^l}^{(2)} + f(Y^{(k)}))$$

ANNEXES DU CHAPITRE 6

ANNEXE 6.1 : propriétes de la fonction de Kreisselmeier-Steinhauser

Soient $g_i(X)$ $(i=1..m)$ m contraintes dépendant du vecteur X .

$X = (x_1 , \dots , x_m)$:

$g_i(X) \leq 0$ $(i=1..m)$

Une mesure cumulative de la satisfaction ou la violation des contraintes est donnée par :

$$C(X) = (1/\rho) . \ln \{ \Sigma_{i=1..m} \exp \{ \rho . g_i(X) \} \}$$

où ρ est un nombre positif choisi par l'utilisateur .

propriété 1 *la fonction de kreisselmeier-Steinhauser est une enveloppe conservative de la contrainte maximale*

$$gmax \leq C(X) \leq gmax + (1/\rho) . \ln (m)$$

démonstration :

a) Posons $gmax = \max_{i=1..m} g_i$

On peut alors écrire

$$C(X) = gmax + (1/\rho) . \ln \{ \Sigma_{i=1..m} \exp \{ \rho . (g_i(X) - gmax(X)) \} \}$$

Soit j* l'indice de la contrainte réalisant le maximum :

$$gmax(X) = g_{j*}(X)$$

Alors

$$C(X) = gmax + (1/\rho) . \ln \{ \Sigma_{j \neq j*} \exp \{ \rho . (g_j(X) - gmax(X)) \} + \exp \{ \rho . (g_{j*}(X) - gmax(X)) \} \} \quad (1)$$

$$C(X) = gmax + (1/\rho) . \ln \{ \Sigma_{j \neq j*} (\geq 0) + 1 \}$$

d'où $C(X) \geq gmax(X)$

b) Dans (1) on majore chaque terme de la somme par 1 :

$$C(X) \leq gmax + (1/\rho) . \ln \{ \Sigma_{j=1..m} 1 \}$$

$\Leftrightarrow$

$$C(X) \leq gmax + (1/\rho) . \ln (m)$$

c) Conclusion

$$gmax \leq C(X) \leq gmax + (1/\rho) \ln(m) \quad \forall X \in R^n$$

□

propriété 2 *C(X) est convexe si $g_i(X)$ sont convexes (i=1..m)*

<u>démonstration</u> :

a) Calcul de $\nabla C(X)$:

$$C(X) = (1/\rho) \ln \{ \Sigma_{i=1..m} \exp \{ \rho . (g_i(X)) \}$$

$$\nabla C(X) = (1/\rho) . \frac{\Sigma_{i=1..m} \exp \{ \rho . (g_i(X)) \} . \rho . \nabla g_i(X)}{\Sigma_{i=1..m} \exp \{ \rho . (g_i(X)) \}}$$

que l'on peut encore écrire :

$$\nabla C(X) = \Sigma_{i=1..m} \exp \{ \rho . (g_i(X)-C(X)) \} . \nabla g_i(X)$$

b) Calcul de $\nabla^2 C(X)$:

$$\nabla^2 C(X) = \Sigma_{i=1..m} \exp \{ \rho . (g_i(X)-C(X)) \} . \nabla (g_i(X)-C(X)) . \nabla g_i(X)^t + \Sigma_{i=1..m} \exp \{ \rho . (g_i(X)-C(X)) \} . \nabla^2 (g_i(X))$$

$$\nabla^2 C(X) = \Sigma_{i=1..m} \exp \{ \rho . (g_i(X)-C(X)) \} . \{ \nabla g_i(X) . \nabla g_i(X)^t . \rho + \nabla^2 (g_i(X)) \} - \rho . \nabla C(X) . \nabla C(X)^t$$

En utilisant la propriété 1 on peut encore écrire

$$\nabla^2 C(X) = \Sigma_{i=1..m} \{ \exp \{ \rho . (g_i(X)-C(X)) \} . \nabla^2 (g_i(X)) \} + \Sigma_{i=1..m} \Sigma_{j=1..m} \{ \exp \{ \rho . (g_i(X)-C(X)) \} . \exp \{ \rho . (g_j(X)-C(X)) \} . \{ \nabla g_i(X) - \nabla g_j(X) \} . \{ \nabla g_i(X) - \nabla g_j(X) \}^t \}$$

c) Si les contraintes g_i sont des fonctions convexes, alors leur matrice hessienne $\nabla^2 g_i$ est semi-définie positive .

De plus, $\{\nabla g_i(X) - \nabla g_j(X)\} . \{\nabla g_i(X) - \nabla g_j(X)\}^t$ est semi-définie positive en tant que matrice produit d'un vecteur par lui-même .

Finalement, tous les coefficients de $\nabla^2 C$ sont positifs .

Donc :

.) $\nabla^2 C$ (X) est semi-définie positive car somme de matrices semi-définies positives .

c'est-à-dire C(X) est convexe si les $g_i(X)$ le sont .

□

ANNEXE 6.2 Choix du paramètre ρ

.) $\nabla C(X)$ peut s'écrire :

$$\nabla C(X) = \{ \sum_{i \neq j^*} \exp \{ \rho . (g_i(X) - C(X)) \} . \nabla g_i(X) \} + \exp \{ \rho . (gmax(X) - C(X)) \} . \nabla gmax(X)$$

où j^* est tq $gmax = g_{j^*}$

or $C(X) \geq g_i(X)$

car $\forall X$ par la propriété 1
$gmax(X) \approx C(X)$ si $\rho \rightarrow +\infty$

d'où :

$\nabla C(X) \leq \nabla gmax(X)$ si $\rho \rightarrow +\infty$

.) Par la propriété 1 on remarque donc que plus ρ est grand et plus C colle à gmax .[fig. 1]

Il peut alors y avoir des problèmes quand gmax est une fonction discontinue .

Le choix du paramètre ρ doit donc être un compromis entre le désir de coller le plus possible à gmax et la crainte de la discontinuité des gradients .

Un choix conseillé par J.F.Barthelemy est :

$$\rho = \frac{\ln(m)}{\varepsilon}$$

où ε est la tolérance du programme d'optimisation .

Un avantage de ce choix est que :
Si $C(X) = 0$, alors, par la propriété 1, on obtiendra $|gmax(X)| \leq \varepsilon$
c'est-à-dire gmax sera une contrainte active .

Illustration du choix du parametre ρ

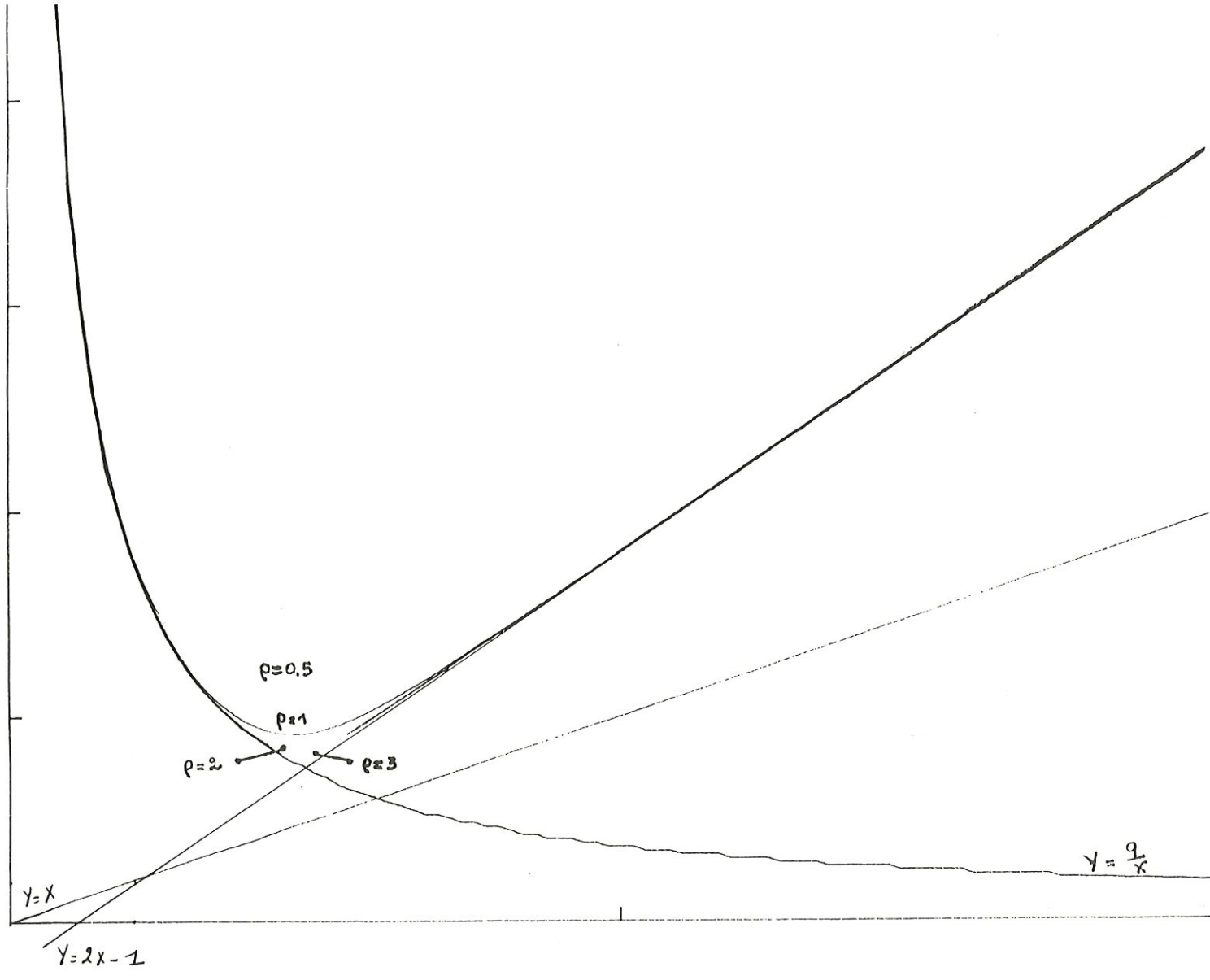
Soient les deux fonctions

$$g_1(x) = 2x - 1$$
$$g_2(x) = 9/x$$

d'où

$$C(x) = (1/\rho) \ln \{ \exp (2\rho x - \rho) + \exp (9\rho/x) \}$$

La figure suivante présente ces fonctions pour différentes valeurs de ρ :



ANNEXE 6.3 Etude de sensibilité

La sensibilité d'un sous-problème

$$\text{Min } C(Y^\circ, X)$$
$$\text{Sous } X^l \le X \le X^u$$

par rapport à des petites variations de Y peut être estimée au voisinage de Y° par le développement suivant :

$$C\tilde{}(Y ; Y^\circ) = C(Y^\circ, X^*) + \Sigma_{i+} \frac{\partial C(Y,X^*)}{\partial y_i}\Big|_{Y^\circ} (y_i - y_i^\circ)$$

$$+ \Sigma_{i-} \frac{\partial C(Y,X^*)}{\partial y_i}\Big|_{Y^\circ} (y_i - y_i^\circ) \frac{y_i^\circ}{y_i}$$

où $\dfrac{\partial C(Y,X^*)}{\partial y_i}\Big|_{Y^\circ}$ est obtenu par analyse de sensibilité

d'un problème sans contrainte **[Ref.9]**

ANNEXE 6.4 Relation entre $(SN1)^{(k)(i)}$ et (1)

Soit X_i^* solution de $\underset{X_i^l \le X_i \le X_i^u}{\text{Min}}\ C_i (Y^{(k)(j)}, X_i)$

Si $C_i (Y^{(k)(j)}, X_i^*) = C_i^*$

alors par la propriété 1 de la fonction de Kreisselmeier-Steinhauser

$$gmax (Y^{(k)(j)}, X_i^* \ ; \ Y^{(k)}, X_i^{(k)}) \le C_i^*$$

d'où X_i^* sera C_i^*-admissible pour le problème (1).

cqfd

Relation entre $(SN2)^{(k)}$ et (2)

Comme $C_i^{\sim} (Y, X_i^{*(k)(j)} ; Y^{(k)}, X_i^{(k)}) \approx C_i (Y, X_i^{*(k)(j)})$

pour $Y^{(k)}(1-\beta) \le Y \le (1+\beta) Y^{(k)}$

Et que $C_i (Y, X_i^{*(k)(j)}) \ge g_i max (Y, X_i^{*(k)(j)})$

où $g_i max = \max_j g_{ij}$ par la propriété (1) de la fonction de Kreisselmeier-Steinhauser

on peut immédiatement en déduire que

$$C_i^{\sim} (Y, X_i^{*(k)(j)} ; Y^{(k)}, X_i^{(k)}) \le 0$$

d'où $g_{ij} (Y, X_i^{*(k)(j)}) \le 0 \qquad (j=1..ncgi(i))$

cqfd

REFERENCES :

[REF1] Large scale systems — Y . Y HAIMES
Studies in management science and systems 7
North Holland (1982)

[REF2] Elements of structural optimisation
R . T HAFTKA
M . P KAMAT
Mechanics of structural systems
M . Nijhoff (1985)

[REF3] Numerical optimisation techniques for engineering design with applications — G . N VANDERPLAATS
Mac Graw-Hill (1984)

[REF4] These de doctorat — V . BRAIBANT
Collection des publications n° 102
Université de Liège (1986)

[REF5] Structural optimisatin : A new dual method using mixed variables
C . FLEURY
V . BRAIBANT
International journal for numerical methods in engineering, vol 23,409/428 (1986)

[REF6] An improved multilevel optimisation approch for the design of complex engineering systems
J-F . M BARTHELEMY
AIAA paper 86-0950-CP (1986)

[REF7] Systematic control design by optimising a vector performance index
G . KREISSELMEIER
R . STEINHAUSER
Proc of IFAC symposium on computer aided design of control systems,Zurich,Switzerland (1979)
113-117

[REF8] A computer simulator for development of engineering system design methodologies
S . L . PADULA
J . SOBISZCZANSKI - SOBIESKI
(à paraître)

[REF9] Introduction to sensitivity and stability analysis in nonlinear programming A.V FIACCO
Mathematics in science and engineering,
volume 165
Academis press, New York (1983)